CHAPITRE : 16

ESPACES PROBABILISES FINIS

1 / Vocabulaire :

1.1 On appelle **épreuve**, une expérience aléatoire susceptible d'être répétée.

1.2 Lorsque l'on effectue une expérience aléatoire, certains faits liés à cette expérience peuvent se produire ou non. On les appelle **évènements.**

1.3 A chaque expérience aléatoire, on peut associer un ensemble Ω, appelé **univers**, tel que chaque évènement puisse être représenté par une partie de Ω.
Dans ce cours, on suppose toujours que Ω **est un ensemble fini** et on note $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω.

1.4 Les singletons $\{\omega\}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont appelés **évènements élémentaires.**

1.5 Le couple $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ est appelé **espace probabilisable fini.**

1.6 Tout évènement qui n'est jamais réalisé est dit **évènement impossible.**

1.7 Tout évènement qui est toujours réalisé est dit **évènement certain.**

1.8 Soient A et B deux évènements de $\mathcal{P}(\Omega)$. A et B sont dits **disjoints** ou **incompatibles** si $A \cap B = \emptyset$

1.9 Un **système complet d'évènements** (ou partition de Ω) est une famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'évènements de Ω tels que :
- $\forall\ (i,j) \in [[1;n]]^2\ ,\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ c'est à dire que les évènements A_i sont deux à deux incompatibles.
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

2 / Notations :

$\omega \in \Omega$	ω est un résultat possible de l'épreuve
$\{\omega\} \subset \Omega$	ω est un évènement élémentaire
$A \in \mathcal{P}(\Omega)$	A est un évènement
$\overline{A}$	évènement contraire de A
$A \cap B$	signifie que A **et** B sont réalisés
$A \cup B$	signifie que A **ou** B sont réalisés ('ou' inclusif)
$A \setminus B$	signifie que A est réalisé mais pas B
$A \,\Delta\, B$	signifie que soit A soit B est réalisé, mais pas les deux ('ou' exclusif)
$A \subset B$	signifie que la réalisation de A implique celle de B

.

3 / Probabilités :

3.1 Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini, on appelle **probabilité** toute application P définie de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $[0;1]$ et vérifiant les conditions suivantes :

· $P[\Omega] = 1$

· Pour toute famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ d'évènements deux à deux incompatibles on a :

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P\left[A_i\right]$$

3.2 Vocabulaire:

Le triplet $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ est appelé **espace probabilisé fini**.

Pour tout évènement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, le réel $P[A]$ est appelé **probabilité de l'évènement** A.

3.3 Propriétés:

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini.

3.3.1 $P[\overline{A}] = 1 - P[A]$

3.3.2 $P[\emptyset] = 0$

3.3.3 $P[A \setminus B] = P[A] - P[A \cap B]$

3.3.4 Si $A \subset B$ alors $P[A] \leq P[B]$

3.3.5 $P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

3.3.6 Inégalité de Boole : soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'évènements,

alors $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} P\left[A_i\right]$

3.4 Formule du crible (ou de Poincarré):

Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille d'évènements , alors

$$P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P\left[A_i\right] - \sum_{1\leq i_1<i_2\leq n} P\left[A_{i_1} \cap A_{i_2}\right] + \sum_{1\leq i_1<i_2<i_3\leq n} P\left[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}\right] +$$
$$............+(-1)^{n+1} P\left[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ...... \cap A_{i_n}\right]$$

3.5 Formule du crible pour un système complet d'évènements:

Si $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ est un système complet d'évènements alors $P\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} P\left[A_i\right]$

3.6 Théorèmes :

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ et soient $p_1, p_2, ..., p_n$ n nombres réels ,

3.6.1 Si $\forall\ i \in [[1;n]]$ $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ alors l'application P définie pour tout i de $[[1;n]]$ par $P[\{\omega_i\}] = p_i$ est une probabilité et est unique.

3.6.2 Réciproquement, si P est une probabilité telle que $\forall\ i \in [[1;n]]$ $P[\{\omega_i\}] = p_i$ alors $\forall i \in [[1;n]]$: $p_i \geq 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

.

3.7 Probabilité uniforme.:

3.7.1 Définition .: **probabilité uniforme ou équiprobabilité**

Il y a équiprobabilité lorsque les probabilités de tous les évènements élémentaires sont égales ; on parle alors de probabilité uniforme.

3.7.2 Théorème :

S'il y a équiprobabilité alors pour tout évènement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a :
$P[A] = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$.

4 / **Probabilités conditionnelles :**

4.1 Définition : **probabilité conditionnelle**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini et soient A et B deux évènements de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On appelle probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que A est réalisé l'application P_A définie si $P[A]$ n'est pas nulle par :
$\forall\ B\ \in\ \mathcal{P}(\Omega) \quad P_A[B] = \dfrac{P[A\cap B]}{P[A]}$ autre notation : $P_A[B] = P[B/A]$
Remarque : $P[A\cap B] = P_A[B]\times P[A] = P_B[A]\times P[B]$

4.2 Propriétés :

4.2.1 L'application P_A est une probabilité.
4.2.2 $P_A[\overline{B}] = 1 - P_A[B]$
4.2.3 $P_A[B_1\cup B_2] = P_A[B_1] + P_A[B_2] - P_A[B_1\cap B_2]$

4.3 Formule des **probabilités composées** : ou du "conditionnement successif "

Soit $(A_i)_{1\le i\le n}$ une famille d'évènements telle que $P\left[A_1\cap A_2\cap ....\cap A_{n-1}\right]\neq 0$, alors
$P\left[\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\right] = P\left[A_1\right]\times P_{A_1}[A_2]\times P_{A_1\cap A_2}[A_3]\times .....\times P_{A_1\cap A_2\cap ....\cap A_{n-1}}[A_n]$

4.4 Formule des **probabilités totales** :

Soit $(A_i)_{1\le i\le n}$ un système complet d'évènements de probabilités non nulles .
Pour tout évènement B on a
$P\left[B\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} P\left[A_i\cap B\right] = \sum\limits_{i=1}^{n} P\left[A_i\right]\times P_{A_i}[B]$
Cas particulier : si $P\left[A\right]$ et $P\left[\overline{A}\right]$ sont non nulles alors
$P\left[B\right] = P\left[A\right]\times P_A[B] + P\left[\overline{A}\right]\times P_{\overline{A}}[B]$

4.5 Formule de **Bayes**:

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements de probabilités non nulles et soit B un évènement tel que $P[B]\neq 0$
pour tout $i_0\in I$, on a : $P_B[A_{i_0}] = \dfrac{P[A_{i_0}]\times P_{A_{i_0}}[B]}{\sum\limits_{i\in I} P\left[A_i\right]\times P_{A_i}[B]}$

.

5 / Indépendance en probabilité :

5.1 Définition : **évènements indépendants**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Deux évènements A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont dits indépendants pour la probabilité P si et seulement si $P[A \cap B] = P[A] \times P[B]$ ou encore : $P_A[B] = P[B]$ et $P_B[A] = P[A]$

5.2 Propriétés :

Si deux évènements A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ sont indépendants pour la probabilité P alors : $\overline{A}$ et B , A et $\overline{B}$, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont également pour P .

5.3 Propriétés :

Si $P[A] = 0$ ou $P[A] = 1$ alors A est indépendant de tout autre évènement.

5.4 Définition **famille mutuellement indépendante** :

Dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, la famille d'évènements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est dite mutuellement indépendante pour la probabilité P si pour toute partie I incluse dans $[[1, n]]$

on a : $P\left[\bigcap_{i \in I} A_i\right] = \prod_{i \in I} P[A_i]$

5.5 Définition : **évènements deux à deux indépendants** :

Dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une famille d'évènements deux à deux indépendants pour la probabilité P si $\forall\ (i, j) \in [[1, n]]^2$ avec $i \neq j$ on a :
$P[A_i \cap A_j] = P[A_i] \times P[A_j]$

5.6 Propriétés :

L'indépendance mutuelle entraine l'indépendance deux à deux.
Attention : la réciproque est fausse.

5.7 Propriétés :

Dans $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, si la famille $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est mutuellement indépendante, (respectivement si les évènements sont deux à deux indépendants) alors la famille $(B_i)_{1 \leq i \leq n}$ où B_i désigne soit A_i soit $\overline{A_i}$ est également une famille mutuellement indépendante, (respectivement , ses évènements sont deux à deux indépendants).

5.8 Définition : **épreuves indépendantes**

Des épreuves sont dites indépendantes si les évènements associés à ces épreuves sont mutuellement indépendants..

.

CHAPITRE : 17

LIMITES ET COMPARAISONS

DE FONCTIONS NUMERIQUES

1 / Vocabulaire :

1.1 Définition : Intervalle :

Soit I un ensemble inclus dans $\mathbb{R}$. I est appelé intervalle de $\mathbb{R}$ si et seulement si : pour tout couple (a, b) de I^2, le segment $[a, b]$ est inclus dans I.

1.2 Définition : Voisinage :
$\forall\ a \in \mathbb{R}$, $\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^{*+}$, on appelle voisinage de a tout segment $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$
$\forall\ a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de $+\infty$ tout intervalle de la forme $]a;+\infty[$
$\forall\ a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de $-\infty$ tout intervalle de la forme $]-\infty;a[$

2 / Limite :

2.1 Définitions :
Soit x_0 un nombre réel et soit f une fonction dont D_f est le domaine de définition.
On ne peut étudier la limite de f en x_0 que lorsque f est définie au voisinage de x_0
Eventuellement x_0 n'appartient pas à D_f.

2.1.1 **limite finie en $\mathbf{x_0}$**: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ si l'on a :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ \ /\ \ \forall\ x \in D_f,\ \ (\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l|) \leq \varepsilon\ )$$

2.1.2 **limite finie à droite en $\mathbf{x_0}$** (resp. à gauche): $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = l$ si l'on a :

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ \ /\ \ \forall\ x \in D_f \cap]x_0, x_0 + \alpha[\ \ ,\ \ |f(x) - l|) \leq \varepsilon\ \ (\text{resp.}]x_0 - \alpha, x_0[\ )$$

2.1.3 **limite infinie en $\mathbf{x_0}$**

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si l'on a :
$\forall\ A\ > 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall\ x \in D_f\ ,(\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \geq A\ )$

On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ si l'on a :
$\forall\ A < 0\ ,\ \exists\ \alpha > 0\ /\ \forall\ x \in D_f\ ,(\ |x - x_0| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \leq A\ )$

La courbe admet alors une asymptote d'équation $x = x_0$

2.2 Propriétés :

2.2.1 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \alpha > 0\ \ /\ \ f\ (\ [x_0-\alpha; x_0+\alpha] \cap D_f\ ) \subset [l-\varepsilon; l+\varepsilon]$

2.2.2 Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existe, alors cette limite est unique.

2.2.3 Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l,\ \ l \in \mathbb{R}$: alors f est bornée au voisinage de x_0

2.2.4 Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ alors f n'est pas majorée au voisinage de x_0

2.3 Propriété : changement de variable : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h)$

2.4 **Limite en $+\infty$** : (propriétés à modifier pour limite en -∞)

2.4.1 **Limite finie en** $+\infty$ On dit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ si l'on a :

$\forall\ \varepsilon > 0\ ,\ \exists\ B > 0\ /\ \forall\ x \in D_f\ ,\ (\ x \geq B \Longrightarrow |\ f(x) - l\ |) \leq \varepsilon\ )$

La courbe admet alors une asymptote d'équation $y = l$

2.4.2 **Limite infinie en** $+\infty$ On dit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si l'on a :

$\forall\ A > 0\ ,\ \exists\ B > 0\ /\ \forall x \in D_f\ ,(\ x \geq B \Longrightarrow f(x) \geq A\ )$

2.5 Image d'une suite :

Soit (u_n) une suite convergente de limite a . Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ alors la suite $(f(u_n))$ converge et admet pour limite b.

2.6 Opérations sur les limites et formes indéterminées :

Les règles revues dans le chapitre relatif à l'étude des suites sont applicables.
Les principales formes indéterminées à connaitre sont :

$(+\infty) + (-\infty) \qquad 0 \times \infty \qquad \dfrac{0}{0} \qquad \dfrac{\infty}{\infty} \qquad 1^{\infty} \qquad 0^0 \qquad \infty^0$

2.7 Limite et fonction composée :

Soient x_0 et y_0 des éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g deux fonctions telles que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ et $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = l$
Alors $\lim\limits_{x\to x_0} g \circ f(x) = l$

2.8 Limite et inégalités :

Soit x_0 un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et soient f et g deux fonctions telles que:
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l\ ,\ l \in \mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'\ ,\ l' \in \mathbb{R}$
si au voisinage de x_0 on a $f(x) < g(x)$ alors $l \leq l'$

2.9 Théorème d'encadrement : dit des gendarmes

Si au voisinage de x_0 on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$

2.10 Théorème :

Une fonction monotone sur un intervalle ouvert admet une limite finie ou infinie aux bornes de cet intervalle.

.

3 / Négligeabilité

3.1 Définition :

Soient f et g deux fonctions ayant au voisinage d'un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$ le même ensemble de définition.
Au voisinage de a, la fonction f est dite négligeable devant la fonction g si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

On utilise les notations : au voisinage de a : $f(x) << g(x))$ ou encore $f(x) \underset{a}{=} o(g(x))$
Dans ces conditions la fonction g est également dite " prépondérante devant f "

3.2 Croissance comparée des fonctions puissances, logarithmes et exponentielles :

3.2.1 Au voisinage de 0 les grandes puissances positives de x sont négligeables devant les petites. En 0 : si $0 < a < b$ alors $x^b << x^a$

3.2.2 Au voisinage de $+\infty$ les petites puissances positives de x sont négligeables devant les grandes. En $+\infty$: si $0 < a < b$ alors $x^a << x^b$

3.2.3 Au voisinage de $+\infty$ toute puissance positive de x l'emporte sur toute puissance positive de la fonction logarithme .
En $+\infty$: si $\forall\ (a, b) \in\ (\mathbb{R}_*^+)^2$ alors $(\ln x)^b << x^a$

3.2.4 Au voisinage de $+\infty$ la fonction exponentielle impose sa limite à la fonction puissance x^a
En $+\infty$: $\forall\ a \in\ \mathbb{R}$ alors $x^a << e^x$

4 / Equivalence

4.1 Définition :

Soient f et g deux fonctions ayant au voisinage d'un élément a de $\overline{\mathbb{R}}$ le même ensemble de définition.
Au voisinage de a, la fonction f est dite équivalente à la fonction g si et seulement si : $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

On utilise la notation : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$

.

4.2 Propriétés :

4.2.1 Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$, si $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

4.2.2 $f_1(x) \underset{a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{a}{\sim} g_2(x) \Longrightarrow f_1(x) \times f_2(x) \underset{a}{\sim} g_1(x) \times g_2(x)$

4.2.3 $f_1(x) \underset{a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{a}{\sim} g_2(x)$ telles que ni g_1 ni g_2, ne s'annulent au voisinage de a alors $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} \underset{a}{\sim} \dfrac{g_1(x)}{g_2(x)}$

4.2.4 $f_1(x) \underset{a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{a}{\sim} g_2(x)$ **n'entraine pas** $f_1(x) + f_2(x) \underset{a}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$

4.2.5 $\forall\, r \in \mathbb{R}$, $f(x) \underset{a}{\sim} g(x) \Longrightarrow (f(x))^r \underset{a}{\sim} (g(x))^r$

4.2.6 **Attention :** $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$ **n'entraine pas** $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$

4.3 Exemples d'équivalents :

4.3.1 $\ln x \underset{1}{\sim} x - 1$

4.3.2 $\ln(1+u) \underset{0}{\sim} u$

4.3.3 $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$

4.3.4 $\forall\, a \in \mathbb{R}$ on a $x^a - 1 \underset{1}{\sim} a(x-1)$

4.3.5 $\forall\, a \in \mathbb{R}$ on a $(1+u)^a - 1 \underset{0}{\sim} au$

4.3.6 $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$

4.3.7 $\tan(x) \underset{0}{\sim} x$

4.3.8 $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$

CHAPITRE : 18

CONTINUITE DES FONCTIONS NUMERIQUES

FONCTIONS RECIPROQUES ET CIRCULAIRES RECIPROQUES

1 / Continuité en un point

1.1 Définitions :

Soit x_0 un nombre réel et soit f une fonction définie au voisinage de x_0.
Etudier la continuité de f c'est déterminer quels sont les points de son ensemble de définition où f est continue.

1.1.1 Continuité en x_0 :

f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
Dans tous les autres cas f est dite discontinue en x_0.

1.1.2 Continuité à droite (resp. à gauche) en x_0 :

f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$)

1.2 Propriétés :

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff f$ est continue en x_0

1.3 Propriétés :

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et si f et g sont continues en x_0 alors $f + g$, $f \times g$ et λf sont continues en x_0.

Si f est continue en x_0 et si $f(x_0) \neq 0$ alors $1/f$ est continue en x_0.

Si f est continue en x_0 et si g est continue en $f(x_0)$ alors $g \circ f$ est continue en x_0.

1.4 Définition : **prolongement par continuité**

Soit x_0 un nombre réel , soit f une fonction définie au voisinage de x_0, mais non définie au point x_0 . Si la fonction f admet en x_0 des limites à droite et à gauche qui sont **finies et égales**, alors on peut prolonger la fonction f par continuité en x_0
en posant : $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Par abus de notation, on dit alors que f devient définie et continue en x_0.

.

1.5 Définitions :

1.5.1 **Continuité sur un intervalle** :

Une fonction est dite continue sur un intervalle si elle est continue en tout point de cet intervalle.

1.5.2 **Continuité par morceaux :**

Une fonction est dite continue par morceaux sur un segment $[a, b]$ si elle n'admet qu'un nombre fini de points de discontinuité dans $[a, b]$, et si, en ces points, elle admet une limite à droite et à gauche.

1.6 Continuité des fonctions de bases :

Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
Les fonctions rationnelles sont continues en tout point de leur ensemble de définition.
Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction tangente est continue sur son ensemble de définition: $\cup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$
Les fonctions logarithme et exponentielle sont continues sur leurs domaines de définitions.

1.7 Théorèmes des valeurs intermédiaires :

1.7.1 Théorème :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I,
soient a et b deux éléments de I :
$f(a) \times f(b) < 0 \Longrightarrow \exists\ c \in [a, b]\ /\ f(c) = 0.$

1.7.2 Propriété :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I,
si f ne s'annule pas sur I alors f conserve un signe constant sur I.

1.7.3 Théorème :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I,
soient x et y deux éléments de $f(I)$:
$\forall\ d \in [x, y]\ ,\ \exists\ c \in I\ /\ f(c) = d.$

1.7.4 Propriété :

Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors $f(I)$ est un intervalle (attention la réciproque est fausse).

1.8 Propriétés : **image d'un segment**

Rappel : un segment est un intervalle de $\mathbb{R}$ fermé borné.
Si est f une fonction définie et continue sur un segment $[a, b]$ alors il existe x_0 et y_0 de $[a, b]$ tels que $f([a, b]) = [f(x_0), f(y_0)]$.
f admet en x_0 un minimum et en y_0 un maximum. f est donc bornée sur $[a, b]$.
En résumé : l'image d'un segment est un segment, et une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

2 / Fonction réciproque

2.1 Théorèmes :

2.1.1 Si f est une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I alors

2.1.1.1 f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

2.1.1.2 f^{-1} et f ont les mêmes variations.

2.1.1.3 f^{-1}, bijection réciproque de $f(I)$ vers I , est continue.

2.1.2 Si a et b sont deux éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ tels que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ alors $\lim\limits_{y \to b} f^{-1}(y) = a$.

2.1.3 Si f et g sont deux bijections alors $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

2.2 Graphiquement :

Les courbes représentatives de deux fonctions réciproques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $x = y$.

3 / Fonctions puissances d'exposant entier

$\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ soit $f_n : x \to x^n$

3.1 Théorèmes :

3.1.1 Si n est pair alors f_n est croissante de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$ donc bijective. La bijection réciproque, $(f_n)^{-1} : x \to \sqrt[n]{x}$ est définie, croissante, de $[0, +\infty[$ vers $[0, +\infty[$.

3.1.2 Si n est impair alors f_n est croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ donc bijective. La bijection réciproque, $(f_n)^{-1} : x \to \sqrt[n]{x}$ est définie, croissante, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

3.2 Propriété :

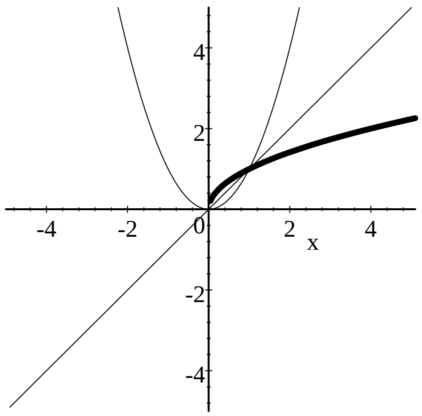
Les fonctions $x \to \sqrt[n]{x}$ coincident sur $]0; +\infty[$ avec les fonctions puissances d'exposant réel $x \to x^{\frac{1}{n}} = \exp(\frac{1}{n}\ln(x))$.

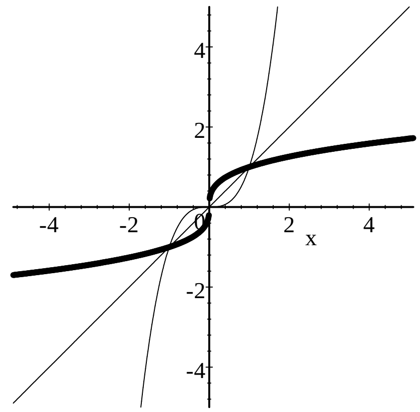
3.3 Attention :

3.3.1 Si n est pair , $x \to \sqrt[n]{x}$ est définie sur $[0, +\infty[$ alors que $x \to x^{\frac{1}{n}}$ n'est définie que sur $]0; +\infty[$ donc $\sqrt[2]{0} = 0$ mais $0^{1/2}$ n'éxiste pas.

3.3.2 Si n est impair , $x \to \sqrt[n]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$ alors que $x \to x^{\frac{1}{n}}$ n'est définie que sur $]0; +\infty[$ par exemple: $\sqrt[3]{-27} = -3$ mais $(-27)^{1/3}$ n'éxiste pas.

3.4 Graphiquement : fonctions puissances





f(x)=x^n pour n pair et **g(x)=**$\sqrt[n]{x}$ f(x)=x^n pour n impair et **g(x)=**$\sqrt[n]{x}$

4 / Fonction arcsinus (HORS PROGRAMME)

4.1 Définition :

La fonction $x \to \sin(x)$ est une bijection continue et croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$, elle admet donc une bijection réciproque arcsinus, notée arcsin telle que :

$\forall\ y \in [-1,1]\,,\ x = \arcsin(y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin(x) = y \end{cases}$

4.2 Propriété :

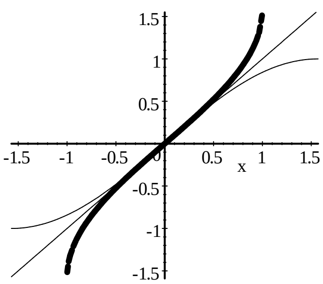
4.2.1 La fonction. arcsin est impaire.

4.2.2 $\forall\ x \in [-1,1]\ ,\quad -\dfrac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \dfrac{\pi}{2}$

4.2.3 $\forall\ x \in]-1;1[\quad \arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4.2.4 $\arcsin(x) \underset{0}{\sim} x$

4.3 Graphiquement : arcsinus



y=sin(x) et **y=arcsin(x)**

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arcsin	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

5 / Fonction arccosinus (HORS PROGRAMME)

5.1 Définition :

La fonction $x \to \cos(x)$ est une bijection continue et décroissante de $[0;\pi]$ sur $[-1,1]$, elle admet donc une bijection réciproque arccosinus, notée arccos telle que :

$\forall\ y \in [-1,1]\,,\ x = \arccos(y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in [0;\pi] \\ \cos(x) = y \end{cases}$.

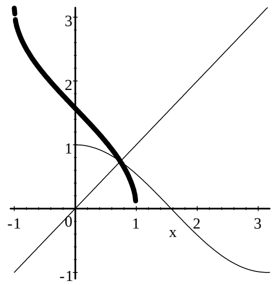
5.2 Propriétés :

5.2.1 $\forall\ x \in [-1,1]\,,\ 0 \leq \arccos(x) \leq \pi.$

5.2.2 $\forall\ x \in]-1;1[\quad \arccos'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5.2.3 $\arccos(1-x) \underset{0^+}{\sim} \sqrt{2x}$

5.3 Graphiquement : arccosinus



y=cos(x) et **y=arccos(x)**

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
arccos	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0

6 / Fonction arctangente

6.1 Définition :

La fonction $x \to \tan(x)$ est une bijection continue et croissante de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une bijection réciproque arctangente, notée arctan telle que :

$$\forall\, y \in \mathbb{R},\ x = \arctan(y) \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ \tan(x) = y \end{array} \right. .$$

6.2 Propriétés :

6.2.1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

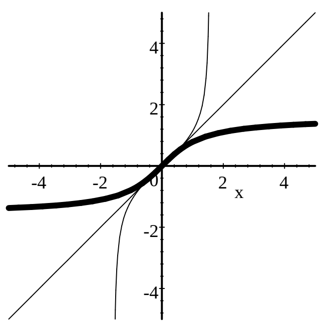
6.2.2 $\forall\, x \in \mathbb{R},\ -\dfrac{\pi}{2} < \arctan(x) < \dfrac{\pi}{2}$

6.2.3 $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$

6.2.4 La fonction arctan est impaire .

6.2.5 $\arctan(x) \underset{0}{\sim} x$

6.3 Graphiquement : arctangente



y=tan(x) et **y=arctan(x)**

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
arctan	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$

6.4 Propriété :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^* \quad \arctan(x) + \arctan\left(\tfrac{1}{x}\right) = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\pi}{2} \text{ si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$$

CHAPITRE : 19

FONCTIONS DERIVABLES, DERIVEES,

THEOREMES DES ACCROISSEMENTS FINIS

1 / Taux d'accroissement

1.1 Définition :

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
On appelle taux d'accroissement de f entre x_0 et x_1 le nombre $T(x_0, x_1) = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$
pour $x_0 \neq x_1$, éléments de I

1.2 Interprétation géométrique :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
Soient $M_0(x_0, f(x_0))$ et $M_1(x_1, f(x_1))$ deux points distincts de $\mathcal{C}$.
$T(x_0, x_1)$ est le coefficient directeur de la sécante à la courbe (M_0, M_1).

2 / Nombre dérivé

Soit f une fonction réelle définie sur $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ $(\alpha \in \mathbb{R}_+^*)$

2.1 Définition : nombre dérivé

Si $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une **limite finie** lorsque x tend vers $x_0, (x \neq x_0)$ alors
f est dite dérivable en x_0 .
Lorsqu'elle existe, cette limite finie est appelée nombre dérivé en x_0.
Notation : $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$

2.2 Interprétation géométrique :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
Si f est dérivable en x_0 alors $\mathcal{C}$ admet en M_0 une tangente de coefficient directeur $f'(x_0)$.
L'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 est alors : $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$.
La tangente à $\mathcal{C}$ en M_0 peut être considérée comme la "position limite" de la sécante à la courbe (M_0, M_1) lorsque x_1 tend vers x_0 .
Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est infinie alors f n'est pas dérivable en x_0 mais la courbe $\mathcal{C}$ admet au point M_0 une tangente verticale d'équation $x = x_0$

2.3 Autres notations :

1) On pose $x = x_0 + h$ et alors $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

2) On peut aussi considérer que $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point $M_0(x_0, f(x_0))$, avec $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

2.4 Propriété : Développement limité d'ordre 1 au voisinage de x_0

f dérivable en $x_0 \Leftrightarrow \exists\ a \in \mathbb{R}\ /\ \ f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$

Dans ces conditions, $a = f'(x_0)$ et l'écriture $f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + a(x - x_0) + o(x - x_0)$ est appelée développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de x_0

2.5 Propriété :

Si f est une fonction dérivable en x_0 alors elle est continue en x_0. La réciproque est fausse.

2.6 Nombre dérivé à droite, à gauche :

2.6.1 Définition :

Lorsque $\lim_{x \to x_{0+}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe **et est finie** alors f est dite dérivable à droite en x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé à droite en x_0;

alors $f'_d(x_0) = \lim_{x_1 \to x_{0+}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

De même à gauche avec $f'_g(x_0) = \lim_{x_1 \to x_{0-}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

2.6.2 Propriété :

f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont **égaux et finis**

2.6.3 Interprétation géométrique des nombres dérivés à droite ou à gauche :

Si f est dérivable à droite en x_0 (resp. à gauche) alors la courbe $\mathcal{C}$ admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une demi tangente à droite de coefficient directeur $f'_d(x_0)$ (respectivement à gauche avec $f'_g(x_0)$).

3 / Fonction dérivée

3.1 Définition :

Si f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, alors la fonction de I vers $\mathbb{R}$ qui à x associe $f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f . Elle est notée f' ou Df ou $\dfrac{df}{dx}$.

3.2 Opérations sur les dérivées :

	3.2.1	3.2.2	3.2.3	3.2.4	3.2.5	3.2.6	3.2.7	3.2.8
f	$\lambda = cte$	$u + v$	$u \times v$	λu	$\dfrac{1}{u(x)}$	$\dfrac{u}{v}$	$f[u(x)]$	$f^{-1}(x)$
f'	0	$u' + v'$	$u'v + uv'$	$\lambda u'$	$-\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$	$\dfrac{vu' - uv'}{v^2}$	$u'(x) \times f'[u(x)]$	$\dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$

3.3 Dérivées des fonctions à valeurs complexes :

Soit f une fonction définie sur un sous ensemble D_f de $\mathbb{R}$ et prenant ses valeurs dans $\mathbb{C}$
Soient g et h les fonctions définies sur D_f par :
$\forall\ x \in D_f,\ \ g(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ et $h(x) = \mathrm{Im}(f(x))$.
Si les fonctions g et h sont dérivables sur un sous ensemble D' de D_f alors f est dite dérivable sur D' et $\forall\ x \in D',\ \ f'(x) = g'(x) + i.\ h'(x)$.
Si $\forall\ x \in D_f,\ \ f(x) = r.e^{ix}$ alors $f'(x) = r.i.e^{ix}$

4 / Extrémum

4.1 Définition :

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit x_0 un élément de I.
On dit que f admet en x_0 un maximum local (resp. un minimum local) si et seulement si : $\exists\ \alpha\ \in \mathbb{R}_+^*\ \ /\ \ \forall\ x \in]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\ ,\ f(x) \leq f(x_0)$ (resp. $f(x) \geq f(x_0)$)

4.2 Définition :

Un extrémum local est soit un maximum local soit un minimum local

4.3 Théorème:

$$\left.\begin{array}{ll} c_1 & \text{Si } f \text{ est définie sur un voisinage ouvert de } x_0 \text{........} \\ c_2 & \text{Si } f \text{ est dérivable en } x_0 \text{..} \\ c_3 & \text{Si } f \text{ admet en } x_0 \text{ un extrémum local....................} \end{array}\right\} \text{alors } f'\ (x_0) = 0$$

4.4 Attention :

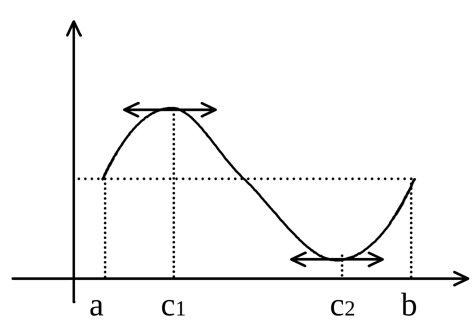
4.4.1 Une fonction f peut admettre en x_0 un extrémum alors que $f'(x_0)$ n'est pas nul.
4.4.2 $f'(x_0)$ peut être nul alors que f n'admet pas d'extrémum en x_0.
4.4.3 Si f est définie dans V_{x_0}, un voisinage de x_0, si $f'(x_0) = 0$ et si dans V_{x_0}, $f(x) - f(x_0)$ conserve un signe constant alors f admet un extrémum en x_0

5 / Théorème de Rolle

5.1 Théorème de Rolle :

Soit f une fonction réelle définie continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$
si $f(a) = f(b)$ alors il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$

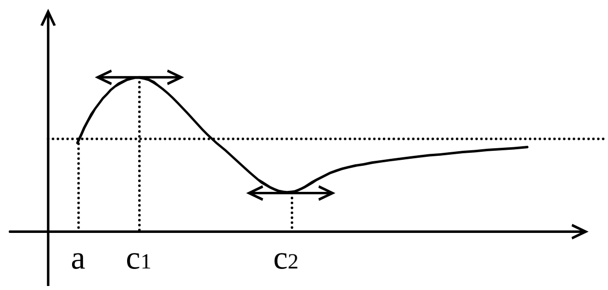
5.2 Graphiquement :



5.3 Théorème de Rolle généralisé :

Soit f une fonction réelle définie continue sur $[a, +\infty[$ et dérivable sur $]a, +\infty[$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$ alors il existe un élément c de $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$

5.4 Graphiquement :



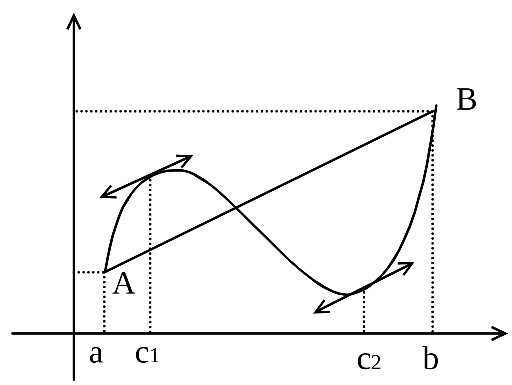
.

6 / Accroissements finis

6.1 Formule des accroissements finis :

Si f est une fonction réelle, définie continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe un élément c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$

6.2 Graphiquement :



6.3 Inégalité des accroissements finis :

Soit f une fonction réelle définie continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

$1^{ère} forme$ en posant $m = \inf\limits_{x \in]a,b[} f'(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in]a,b[} f'(x)$ alors

$$m(b-a) \ \leq \ f(b) - f(a) \ \leq \ M(b-a)$$

$2^{ème} forme$ $\quad | f(b) - f(a) | \ \leq \sup\limits_{t \in]a,b[} |f'(t)| \ \times | b - a |$

7 / Application du théorème des accroissements finis

7.1 Variations d'une fonction :

Soit f une fonction réelle définie continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\overset{o}{\mathrm{I}}$

7.1.1 f est croissante sur $\mathrm{I} \Longleftrightarrow \forall x \in \overset{o}{\mathrm{I}}\ ,\quad f'(x) \geq 0$

7.1.2 f est décroissante sur $\mathrm{I} \Longleftrightarrow \forall x \in \overset{o}{\mathrm{I}}\ ,\quad f'(x) \leq 0$

7.1.3 f est constante sur $\mathrm{I} \Longleftrightarrow \forall x \in \overset{o}{\mathrm{I}}\ ,\quad f'(x) = 0$

7.1.4 $\forall\ x \in \overset{o}{\mathrm{I}}\ ,\quad f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur I .

8 / Convexité

8.1 Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f .
La fonction f est dite **convexe** sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}$ est au dessus de chacune de ses tangentes.
f dite **concave** si et seulement si la courbe $\mathcal{C}$ est au-dessous de chacune de ses tangentes.

8.2 Propriété :

La courbe représentative d'une fonction à dérivée croissante est au dessus de chacune de ses tangentes.
Si f admet une dérivée seconde sur un intervalle I ouvert de $\mathbb{R}$ alors
$\forall\ x \in I,\ f''(x) \geq 0 \Longleftrightarrow f$ convexe sur $I \Longleftrightarrow f'$ croissante sur I
$\forall\ x \in I,\ f''(x) \leq 0 \Longleftrightarrow f$ concave sur $I \Longleftrightarrow f'$ décroissante sur I

8.3 Définition : Point d'inflexion

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
S'il existe un élément x_0 de I tel que $f''(x)$ s'annule en x_0 et change de signe alors le point M_0 de coordonnées ($x_0,\ f(x_0)$) est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.
Au point M_0, la courbe $\mathcal{C}$ traverse sa tangente.

CHAPITRE : 20

DEVELOPPEMENTS LIMITES

ETUDE DES COURBES

1 / Dérivées successives

1.1 Définitions :

Soit f une fonction dérivable n fois en x_0, la dérivée $n^{ième}$ est définie par :

1) $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$
2) $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$

1.2 Classe de fonctions :

f est de classe C^n sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ **est continue sur** I
f est de classe C^∞ sur I si f est **indéfiniment** dérivable sur I

1.3 Opérations :

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables sur I :

$(f+g)^{(n)} = (f)^{(n)} + (g)^{(n)}$
$(\lambda f)^{(n)} = \lambda (f)^{(n)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1.4 Propriétés :

Si f et g sont de classe C^n sur I alors: $f+g,\ \lambda f,\ f \times g,\ f \circ g,\ \dfrac{f}{g}$ (si g ne s'annule pas) sont de classe C^n sur I.

2 / Formule de Taylor Young

2.1 Théorème :

Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et si 0 est un élément de I alors $\forall\, x \in V_0$, $f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (x)^k \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} + o((x)^n)$.

2.2 Remarque :

L'égalité de Taylor Young, à l'ordre n, nécessite que la fonction f soit seulement C^n sur un voisinage de 0. Elle n'est donc **valable qu'au voisinage de** 0**, localement.**

3 / Développement limité

3.1 Définition :

Soit f une fonction réelle, on appelle développement limité de f en 0,
à l'ordre n, l'écriture $f(x) \underset{0}{=} P(x) + o((x)^n)$ où P est un polynôme de degré n dont les coefficients sont réels.
$P(x)$ s'appelle la partie entière du développement limité.
$o((x)^n)$ est le reste du développement limité à l'ordre n.

3.2 Théorème :

Si f est une fonction C^n au voisinage de 0 alors f admet au voisinage de 0 un développement limité à l'ordre n.

3.3 Remarque :

Une fonction f définie dans un voisinage de 0 (éventuellement privé de 0) peut admettre un dévelopement limité au voisinage de 0.

4 / Développement limité de la fonction exponentielle.

4.1 Théorème :

$$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots.. + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

5 / Développement limité de la fonction ln

5.1 Théorème :

$\forall\ n \in \mathbb{N}, \forall\ x > -1$,

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots. + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

6 / Développements limités des fonctions puissances

6.1 Formule générale :

Soit f_α la fonction définie par $f_\alpha(x) = (1+x)^\alpha$
Si $\alpha \in \mathbb{N}$ alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
Si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$ alors $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ alors $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$

$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots.(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

6.2 Cas particuliers :

$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots\dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots\dots + x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{2^2 2!}x^2 + \frac{3}{2^3 3!}x^3 + \dots\dots + (-1)^{n-1}\frac{3 \times 5 \times 7 \times \dots \times (2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

7 / Développements limités des fonctions circulaires

7.1 $\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$

7.2 $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$

8 / Propriétés des développements limités

8.1 Théorème :
Si une fonction f admet un développement limité en 0, à l'ordre n, alors il est unique.

8.2 Propriété :
Si deux fonctions coïncident au voisinage de 0 (c'est à dire : $\forall\ x \in V_0,\ \ f(x) = g(x)$) alors elles admettent en ce point 0 le même développement limité.

8.3 Théorème :
Ayant le développement limité de f en 0, à l'ordre n , on obtient le développement limité en 0 à l'ordre $p < n$ par troncature.

8.4 Théorème :
Soit f une fonction admettant en 0 un développement limité.
Si f est paire alors le développement limité ne contient que des puissances paires.
Si f est impaire alors le développement limité ne contient que des puissances impaires.

8.5 Théorème :
Soit f une fonction admettant en 0 un développement limité d'ordre n de la forme :
$f(x) \underset{0}{=} a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ avec $a_p \neq 0$ alors $f(x) \underset{0}{\sim} a_p x^p$

9 / Opérations sur les développements limités

Soient f et g deux fonctions admettant un DL en 0 à l'ordre n

9.1 Théorème : Somme

On obtient le DL de $f + g$ en faisant la somme des DL au même ordre

9.2 Théorème : Produit

On obtient le DL de $f \times g$ en faisant le produit des DL à l'odre n et en ne conservant que les termes de degré inférieur ou égal à n

9.3 Théorème : changement de variable pour obtenir le DL de $f(x)$ en 0 à l'ordre n

Si $f(x)$ peut s'écrire $f(x) = g[u(x)]$ avec $\lim\limits_{x \to 0} u(x) = l$, on pose $u(x) = X$
si l'on connait le DL de $u(x)$ en 0,
si l'on connait le DL de g lorsque X tend vers l,
alors on écrit le DL de $g(X)$ en l puis on remplace X par le DL de $u(x)$ et on ne conserve que les termes de degré inférieur ou égal à n

9.4 Théorème : Quotient

Pour obtenir le DL de $\dfrac{f}{g}$ en 0 il faut écrire le DL de $\dfrac{1}{g}$ en 0 sous la forme $\dfrac{1}{1+u}$ à l'ordre n, et celui de f en 0 à l'ordre n puis faire le produit des DL de f et de $\dfrac{1}{1+u}$
On ne conserve ensuite que les termes de degré inférieur ou égal à n

9.5 Théorème : Primitive

Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 alors toute primitive F de f admet au voisinage de 0 un DL à l'ordre $n+1$ obtenu en déterminant une primitive du DL de f et en ajoutant $f(0)$

9.6 Attention : Dérivée

Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0 , on ne peut rien affirmer de l'existence d'un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0 pour f'.
Cependant, si l'on est certain que f' admet un DL à l'ordre $n-1$ au voisinage de 0, alors le DL de f' peut être obtenu par dérivation de celui de f.

10 / Plan d'étude d'une fonction

10.1 Détermination de $\mathcal{D}_f$, domaine de définition de la fonction f .

10.2 Réduction du domaine d'étude par d'éventuelles considérations de parité, périodicité, symétrie ... Soit $\mathcal{D}_e$ le domaine ainsi obtenu.

10.3 Etude de la continuité et de la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}_e$.

10.4 Détermination de la dérivée f', et étude de son signe . Etude des variations de f.

10.5 Etude aux bornes et étude des éventuelles branches infinies.

10.6 Eventuelle étude de concavité, détermination des points d'inflexion, des tangentes aux points particuliers....

10.7 Tracé de la courbe représentative de la fonction f.

11 / Etude des branches infinies

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de le fonction f.
Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$, avec l ou x_0 infini, alors la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche infinie au voisinage de x_0.
Le but de ce paragraphe est de distinguer plusieurs types de branches infinies.

11.1 Nature des branches infinies

11.1.1 Lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = x_0$

11.1.2 Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$, la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = a$

11.1.3 Lorsque $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ alors

11.1.3.1 Si $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ alors la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Ox)

11.1.3.2 Si $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \infty$ alors la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (Oy)

11.1.3.3 Si $\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \neq 0$ alors

11.1.3.3.1 Si $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = b$ alors la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$

11.1.3.3.2 Si $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax = \infty$ alors la courbe $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$

11.1.3.3.3 Si $\lim_{x \to \infty} f(x) - ax$ n'existe pas alors la courbe $\mathcal{C}$ admet une direction asymptotique $y = ax$

12.2 En particulier : l'asymptote oblique ou horizontale

12.2.1 Définition :

La droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f au voisinage de ∞ si et seulement si $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

.

12.2.2 Position par rapport à l'asymptote :

Si au voisinage de l'infini, $f(x) - (ax + b) \geq 0$ (resp. ≤ 0) alors la courbe est située au-dessus de l'asymptote (resp en dessous)

12.2.3 Obtention de l'équation de l'asymptote oblique à l'aide de développements limités :

Il faut déterminer un développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0.
(L'ordre du D.L. dépendant de la fonction)

Ensuite, par changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$ obtenir un développement limité à l'ordre 1 ou 2 de $f(X)$ au voisinage de ∞.

Les termes de dégrés inférieurs à 1 de ce développement limité indiquent l'équation de l'asymptote.

Le terme de degré 2 permet de connaître la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

CHAPITRE : 21

ESPACES VECTORIELS

1 / Espaces vectoriels :

1.1 Définition : Espace vectoriel

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes.
Soit n un nombre entier non nul. On pose $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \mathbb{K} \times .... \times \mathbb{K}$.
On définit sur $\mathbb{K}^n$ deux opérations:

· *Addition* : notée + $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ (u,v) \to u+v \end{array} \right.$ qui est une loi interne car $(u,v) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$

· *Multiplication par les scalaires* : notée · $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \\ (\lambda,u) \to \lambda \cdot u \end{array} \right.$ loi externe car $\lambda \notin \mathbb{K}^n$

On dit que $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ (ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel) si les axiomes suivants sont satisfaits:

Propriétés de l'addition :

(EV1) stabilité de l'addition interne:
$\forall (u,v) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \quad u+v \in \mathbb{K}^n$
(EV2) commutativité :
$\forall (u,v) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \quad u+v = v+u$
(EV3) associativité :
$\forall (u,v,w) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \quad u+(v+w) = (u+v)+w$
(EV4) élément neutre :
il existe un et un seul élément de $\mathbb{K}^n$ noté $O_{\mathbb{K}^n}$ tel que $u + O_{\mathbb{K}^n} = u$.
(EV5) symétrisation :
pour tout élément u de $\mathbb{K}^n$, il existe un et un seul élément de $\mathbb{K}^n$ noté $-u$ tel que $u + (-u) = O_{\mathbb{K}^n}$

Propriétés de la multiplication externe :

(EV6) stabilité de la multiplication externe :
$\forall\ u \in \mathbb{K}^n\ ,\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda \cdot u \in \mathbb{K}^n$
(EV7) distributivité du produit externe par rapport à l'addition dans E :
$\forall\ \lambda \in \mathbb{K}\ \ \forall\ (u,v) \in \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \quad \lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
(EV8) distributivité du produit externe par rapport à l'addition dans $\mathbb{K}$.
$\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \ \forall\ u \in \mathbb{K}^n \quad (\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$
(EV9) associativité mixte :
$\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2\ \ \forall\ u \in \mathbb{K}^n \quad (\lambda \cdot \mu) \cdot u = \lambda \cdot (\mu \cdot u)$
(EV10) produit par l'élément neutre de la multiplication :
Soit $1_{\mathbb{K}}$ l'élément neutre de la multiplication dans $\mathbb{K}$
$\forall\ u \in \mathbb{K}^n \quad 1_{\mathbb{K}} \cdot u = u$

.

1.2 Définition : **combinaison linéaire**

Soit $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit p un nombre entier.
Soit $(e_i)_{\ 1\leq i\leq p}$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{K}^n$.
On dit qu'un vecteur u de $\mathbb{K}^n$ est combinaison linéaire de la famille $(e_i)_{\ 1\leq i\leq p}$ s'il existe p scalaires $\lambda_i \ _{1\leq i\leq p}$ tels que $u = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \cdot e_i$

2 / Sous espaces vectoriels :

2.1 Définition : Sous espace vectoriel

Soit $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une partie F de $\mathbb{K}^n$ est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ si les propriétés suivantes sont vérifiées :

(SEV1) F est une partie non vide de $\mathbb{K}^n$.
(SEV2) F est stable par addition :
$\forall (u, v) \in F^2 \quad u + v \in F$
(SEV3) F est stable pour la multiplication par les scalaires :
$\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall u \in F \quad \lambda.u \ \in F$

2.2 Théorème :

Pour qu'une partie **non vide** F d'un espace vectoriel $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ soit un sous espace vectoriel de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ il faut et il suffit que : $\forall (u, v) \in F^2 \quad \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \lambda \cdot u + \mu \cdot v \in F$
On dit alors que F est : "stable par combinaison linéaire "

2.3 Propriété :

Si F est un sous espace vectoriel de $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$ alors $\begin{cases} O_{\mathbb{K}^n} \in F \\ \forall u \in F \quad (u \in F) \Longrightarrow (-u \in F) \end{cases}$

2.4 Théorème : intersection de sous espaces vectoriels

Si E_1 et E_2 sont deux sous espaces vectoriels de $(E, +, \cdot)$ alors $E_1 \cap E_2$ est un sous espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$
Plus généralement, l'intersection d'un nombre fini ou non de sous-espaces vectoriels est encore un sous espace vectoriel.

2.5 Définition :

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(e_i)_{\ 1\leq i\leq p}$ est noté $vect(e_1, ..., e_p)$ c'est le sous espace vectoriel engendré par la famille de $(e_i)_{\ 1\leq i\leq p}$

3 / Famille génératrice :

3.1 Définition :

Soit $(E, +, \cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient F un sous espace vectoriel de E et $\mathcal{F} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une famille finie de vecteurs de E.
$\mathcal{F}$ est dite **famille génératrice** de F si $vect\ (\mathcal{F}) = F$
Autrement dit : $\forall\ u \in F\ ,\ \exists\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p\ ) \in \mathbb{K}^p\ /\ u = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + ... + \lambda_p e_p$

3.2 Théorème :

Toute sur-famille d'une famille génératrice de F, est une famille génératrice de F.

.

4 / Famille libre , famille liée :

4.1 Définition : **Indépendance linéaire**

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{F}=(e_1,e_2,.....,e_p)$ une famille finie de vecteurs de E. On dit que la famille $\mathcal{F}$ est liée, ou que les vecteurs $e_1,e_2,.....,e_p$ sont linéairement dépendants s'il existe un p-uplet de scalaires $\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_p$ de $\mathbb{K}^p$, non tous nuls tels que : $\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+.....+\lambda_pe_p=O_E$

On dit que la famille $\mathcal{F}$ est libre , ou que les vecteurs $e_1,e_2,.....,e_p$ sont linéairement indépendants, si la famille $\mathcal{F}$ n'est pas liée.

autrement dit :

$\forall(\lambda_1,\lambda_2,....,\lambda_p\ )\in\mathbb{K}^n\ :\ (\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+.....+\lambda_pe_p=O_E)\Longleftrightarrow(\lambda_1=\lambda_2=....=\lambda_p=0)$

4.2 Théorèmes :

Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soit $\mathcal{F}=(e_1,e_2,.....,e_p)$ une famille finie de vecteurs de E. Alors :

4.2.1 $\mathcal{F}$ est une famille liée $\Longleftrightarrow$ l'un au moins de ses vecteurs est combinaison linéaire des autres

4.2.2 Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

4.2.3 Si la famille $\mathcal{F}$ contient deux fois le même vecteur alors elle est liée.

4.2.4 Toute sous-famille d'une famille libre est libre.

5 / Base, dimension, rang :

5.1 Définition : **Base**

On appelle base de E toute famille $\mathcal{B}=(e_1,e_2,.....,e_p)$ qui est libre et génératrice.

5.2 Théorème :

Si $\mathcal{B}=(e_1,e_2,.....,e_p)$ est une base de E, alors, tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Ce sont les coordonnées de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

5.3 Définition : **Dimension**

Si $\mathcal{B}=(e_1,e_2,.....,e_p)$ est une base de l'espace vectoriel E alors $\dim(E)=p$.

5.4 Définition : **Base canonique** de $\mathbb{K}^n$.

On appelle base canonique de $\mathbb{K}^n$ la famille $(e_i)\ _{1\leq i\leq n}$ telle que $e_1=(1,0,0,.....,0)$
$e_2=(0,1,0.....,0)$; $e_3=(0,0,1,0.....,0)$; .....; $e_n=(0,0,0.....,1)$

.

5.5 Théorèmes :

Dans un espace vectoriel de dimension p :

5.5.1 Une famille libre comportant p éléments est également génératrice.
5.5.2 Une famille génératrice comportant p éléments est également libre.
5.5.3 Toute famille libre comporte au plus p éléments.
5.5.4 Toute famille génératrice comporte au moins p éléments.

5.6 Théorème :

Deux bases d'un même espace vectoriel ont le même nombre de vecteurs. La dimension d'un espace vectoriel est donc unique.

5.7 Théorème :

Dans un espace vectoriel de dimension p, pour montrer qu'une famille de p vecteurs est une base, il suffit de montrer qu'elle est libre **ou** génératrice.

5.8 Théorème :

Soit F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel E alors:

5.8.1 $\dim(F) \leq \dim(E)$
5.8.2 $\dim(F) = \dim(E) \Longleftrightarrow E = F$

5.9 Définition : **Rang**

On appelle rang d'une famille de vecteurs, la dimension du sous espace vectoriel que cette famille engendre.

CHAPITRE : 22

APPLICATIONS LINEAIRES

1 / Définitions et propriétés :

1.1 Définition :

Soient $(\mathbb{K}^p,+,\cdot)$ et $(\mathbb{K}^n,+,\cdot)$ deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une **application** f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est dite **linéaire** si $\forall(u,v)\in\mathbb{K}^p\times\mathbb{K}^p \;\; \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2 \quad f(\lambda u+\mu v)=\lambda f(u)+\mu f(v)$
L'ensemble des applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$.

1.2 Définition :

Une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}$ est appelée **forme linéaire** sur $\mathbb{K}$.

1.3 Définition :

Une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$ est appelée **endomorphisme** sur $\mathbb{K}^p$.
L'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{K}^p$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$

1.4 Définition :

Une application linéaire bijective de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ est appelée **isomorphisme** de $\mathbb{K}^p$ sur $\mathbb{K}^n$.

1.5 Définition :

Une application linéaire bijective de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^p$ est appelée **automorphisme** sur $\mathbb{K}^p$.
C'est un endomorphisme bijectif.

1.6 Théorème :

Si f est une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ alors :
$f(0_{\mathbb{K}^p})=0_{\mathbb{K}^n}$ et $\quad f(-u)=-f(u)$

1.7 Théorème :

Une application linéaire transforme une famille liée en une famille liée.
Il n'en est pas de même pour les familles libres.

2 / Noyau, image, rang :

2.1 Définition : Noyau

Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, on appelle **Noyau de** f
l'ensemble $\ker(f)=\{\ u\in\mathbb{K}^p\ /\ f(u)=0\ \}$
Remarque : $\ker(f)=f^{-1}(0)$

2.2 Définition : Image

Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$, on appelle **Image de** f
l'ensemble $\mathrm{Im}(f)=\{\ v\in\mathbb{K}^n\ /\ \exists\ u\in\mathbb{K}^p\ \text{ tel que }\ v=f(u)\ \}$
Remarque : $\mathrm{Im}(f)=f(\mathbb{K}^p)$

2.3 Définition. :
Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. La dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(f)$ est apellée **rang de l'application linéaire** f .
On note $rg(f) = \dim(f(\mathbb{K}^p)) = \dim(\mathrm{Im}(f))$

2.4 Théorèmes :
Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$

2.4.1 $\ker(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$
2.4.2 $\mathrm{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$
2.4.3 f injective $\Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$
2.4.4 f surjective $\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}^n$
2.4.5 Si $\mathcal{F}$ est une famille génératrice d'un ensemble $G \subset \mathbb{K}^p$ alors $f(\mathcal{F})$ est une famille génératrice de $f(G)$.

2.5 Théorèmes : propriétés des dimensions.
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

2.5.1 Théorème du rang :
$dim(\ \mathrm{Im}(f)\ ) + dim(\ \ker(f)\ ) = dim(\ E\ )$

2.5.2 f injective $\Leftrightarrow$ $rg(f) = dim(\ E\ )$

2.5.3 f surjective $\Leftrightarrow$ $rg(f) = dim(\ F\ )$

2.6 Théorèmes : propriétés des isomorphismes
Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$.

2.6.1 S'il existe un isomorphisme de E dans F alors $\dim(E) = \dim(F)$.

2.6.2 Si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $\dim(E) = \dim(F)$ alors :
f est injective $\Longleftrightarrow$ f est surjective $\Longleftrightarrow$ f est bijective

3 / Opérations sur les applications linéaires :

3.1 Théorème :

Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ alors : $\forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$
$\lambda f + \mu g$ est également une application linéaire .

3.2 Théorème :

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ alors $g \circ f$ est linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^m$.

3.3 Théorèmes : Réciproques :

3.3.1 Si f est un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ alors f admet une réciproque notée f^{-1} qui est un isomophisme de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$.

3.3.2 Si f est un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ et g un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$ alors $g \circ f$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^m$. rappel : $[(g \circ f)]^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

.

4 / Application linéaire et bases canoniques :

4.1 Définition

Soit $\mathbb{K}^p$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension p dont $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^p} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ est la base canonique.
Soit $\mathbb{K}^n$ un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension n dont $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n} = (c_1, c_2, ..., c_n)$ est la base. canonique.
Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
$\forall\ j \in [[1;p]] \quad f(e_j)$ est l'image de e_j .
$f(e_j)$ peut être considéré comme étant une matrice colonne à n lignes.
Ces p matrices colonnes composent la matrice de l'application linéaire f, relativement aux bases canoniques $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^p}$ et $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n}$

$$Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n},\mathcal{B}_{\mathbb{K}^p}}(f) = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & & f(e_j) & & f(e_p) \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1j} & ..... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2j} & ..... & a_{2p} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & a_{i2} & ..... & a_{ij} & ..... & a_{ip} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nj} & ..... & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} /\ c_1 \\ /\ c_2 \\ \\ /\ c_i \\ \\ /\ c_n \end{array} \end{array}$$

4.2 Propriété :

Avec les notations ci-dessus, l'appliquation linéaire f est entièrement déterminée par la seule connaissance des images des vecteurs de la base $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^p}$.
Autrement dit , il suffit de connaître $f(e_1)$, $f(e_2), ...,$ $f(e_p)$ pour déterminer l'image de n'importe quel élément de $\mathbb{K}^p$.

4.3 Définition :

La matrice $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n},\mathcal{B}_{\mathbb{K}^p}}(f)$ est appelée :" **matrice de l'application** f "relativement aux bases $\mathcal{B}_{\mathbb{K}^p}, \mathcal{B}_{\mathbb{K}^n}$

5 / Opérations sur les matrices d'applications linéaires :

5.1 Théorèmes :

5.1.1 Soient f et g deux applications linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$:
$Mat(f + g) = Mat(f) + Mat(g)$.

5.1.2 Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ et soit λ un élement de $\mathbb{K}$:
$Mat(\lambda f) = \lambda Mat(f)$.

5.1.3 Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ alors $Mat(g \circ f) = Mat(g) \times Mat(f)$

5.1.4 Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$ alors $\forall\ r \in \mathbb{N},\ Mat[(f)^r] = [Mat(f)]^r$.

5.1.5 Soit f un endomorphisme bijectif de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p)$ alors $Mat(f^{-1}) = [Mat(f)]^{-1}$

6 / Rang

6.1 Définition :

Soit f une application linéaire de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$. Le rang de f est également appelé **rang de la matrice** $Mat_{\mathcal{B}_{\mathbb{K}^n},\mathcal{B}_{\mathbb{K}^p}}(f)$

6.2 Détermination du rang d'une matrice :

6.2.1 Méthode :

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$, il faut transformer la matrice A pour obtenir une matrice de la forme ci-dessous :

$$\begin{array}{c}
\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}^{r}\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \\
\begin{array}{cc}
r\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right. & \\
 &
\end{array}
\begin{pmatrix}
\alpha_{11} & \alpha_{12} & ..... & \alpha_{1r} & \alpha_{1,r+1} & \alpha_{1,r+2} & ..... & \alpha_{1p} \\
0 & \alpha_{22} & ..... & \alpha_{2r} & \alpha_{2,r+1} & \alpha_{2,r+2} & ..... & \alpha_{2p} \\
..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\
0 & 0 & ..... & \alpha_{r,r} & \alpha_{r,r+1} & \alpha_{r,r+2} & ..... & \alpha_{r,p} \\
0 & 0 & ..... & 0 & 0 & 0 & ..... & 0 \\
..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\
0 & 0 & ..... & 0 & 0 & 0 & ..... & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

La nouvelle matrice est obtenue à partir de la matrice A, en permutant deux lignes ou en remplaçant une ligne par une combinaison linéaire d'autres lignes.
On peut également faire les transformations sur les colonnes.
On peut également travailler avec la transposée de A .
Attention : chacune des lignes et des colonnes doit être utilisée.

6.2.2 Propriété :

Lorsqu'une matrice A de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ (ou sa transposée) vérifie :

- $\forall\ i\ \in [[1;r]] \quad a_{ii} \neq 0$
- $\forall\ i\ \in [[r+1;n]]\,,\ \ \forall\ j\ \in [[1;p]] \quad a_{ij} = 0$

alors le rang de la matrice A est r.

6.2.3 Propriété :

Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $\qquad A$ inversible $\iff rg(A) = n$

6.3 Rang de la transposée :

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $\quad rg({}^tA\ ) =\ rg(A\ )$

6.4 Rang d'un système :

6.4.1 Définition :

Soit (S) un système d'équations linéaires : $A \times X = B$
On appelle rang du système (S) le rang de la matrice A canoniquement associée au système (S) .

6.4.2 Propriétés :

Soit (S) un système de n équations linéaires à n inconnues.
(S) système de Cramer $\Leftrightarrow rg(S) = n$.

CHAPITRE : 23

INTEGRALES ET PRIMITIVES

1 / Intégrales

1.1 Définition :

Soit f une fonction **définie et continue** sur un segment S de $\mathbb{R}$. Soit F une primitive de la fonction f sur S . Soient a et b deux éléments de S.
On appelle intégrale de a à b de la fonction f le réel : $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$

1.2 Propriété :

Soit S un segment de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de S.
Soit f une fonction continue, **positive ou nulle** sur $[a, b]$
$\int_a^b f(t)dt$ est l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.
On dit parfois qu'il s'agit de l'aire "sous la courbe ".

1.3 Propriété :

Soit S un segment de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de S.
Si f est une fonction continue, **positive ou nulle** sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(t)dt \geq 0$
On dit parfois "l'intégrale d'une fonction positive ou nulle est positive ou nulle ".

1.4 Propriété :

Soit f une fonction continue sur un segment S de $\mathbb{R}$.
$\forall\ (a, b) \in S^2 \qquad \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt \qquad$ et $\qquad \int_a^a f(t)dt = 0$

1.5 Propriété : **relation de Chasles**.

Soit f une fonction continue sur un segment S de $\mathbb{R}$.
$\forall\ (a, b) \in S^2\ \ \forall\ c \in [a, b]$, $\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$

1.6 Propriété : **Linéarité**

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment S de $\mathbb{R}$.
$\forall\ (a, b) \in S^2$,$\forall\ (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, $\int_a^b[\alpha f(t) + \beta g(t)]dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

1.7 Propriété :

Soit S un segment de $\mathbb{R}$. Soient a et b deux éléments de S.
Si f est une fonction continue, **négative ou nulle** sur $[a, b]$
alors $\int_a^b f(t)dt \ \leq\ 0$. L'aire est alors dite "négative "

1.8 Propriété :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ mais ne conservant pas un signe constant sur le segment $[a,b]$

Il faut considérer le segment $[a,b]$ comme étant l'union de n sous-segments $S_1, S_2, ..., S_n$ tels que sur chacun d'entre eux f conserve un signe constant.

$\int_a^b f(t)dt$ est alors la différence entre la somme des aires positives et celle des aires négatives.

1.9 Théorème :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ telle que

· f **conserve un signe constant** sur le segment $[a,b]$

· $\int_a^b f(t)dt = 0$

Alors f est nulle sur $[a;b]$

1.10 Théorème :

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$

Si $\forall\ t \in [a,b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

1.11 Théorème :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$

Si m et M sont tels que $\forall\ t \in [a;b] \quad m \leq f(t) \leq M$ alors

$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$

1.12 Théorème :

Soit f une fonction continue sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$

$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t|)dt \leq (b-a) \times \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$

2 / Primitives

2.1 Définition : Primitive

Soit f une fonction définie sur **un intervalle** I de $\mathbb{R}$, on dit que F est une primitive de f si et seulement si F est dérivable sur I et si $F' = f$.

2.2 Remarque :

Une primitive est une fonction dérivable, donc elle est continue.

2.3 Théorème : Existence de primitive (théorème de Darboux)

Toute fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ admet au moins une primitive sur I.

2.4 Théorème :

Si f admet une primitive F sur **un intervalle** I alors f admet une infinité de primitives sur I qui se déduisent toutes de F par addition d'une fonction constante sur I

2.5 Attention : Si I n'est pas un intervalle alors le théorème 2.4 est faux

2.6 Attention :

2.6.1 Bien que non continue sur un intervalle, une fonction peut y admettre des primitives

2.6.2 Mais pour certaines fonctions continues sur un intervalle, on ne sait pas déterminer de primitive.

.

2.7 Théorème :

Si f est une fonction de classe C^n sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors, toute primitive F de f est de classe C^{n+1} sur I

2.8 Propriété :

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
$\forall\ a \in I$, la fonction φ définie sur I par $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est une primitive de f.
Toute primitive de f sur I s'écrit sous la forme $\int_a^x f(t)dt$, $\forall\ a\ \in I$.

2.9 Théorème : (primitives usuelles)

$f(x)$	a	x^α $\alpha\neq-1$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$ $x>0$	$\frac{1}{x^2}$ $x\neq0$	$\frac{1}{x}$ $x\neq0$	e^x	a^x $a>0,\ a\neq1$	$\ln x$ $x>0$
$F(x)$	ax	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$2\sqrt{x}$	$-\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|$	e^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$x\ln x - x$

$f(x)$	$\sin(ax+b)$	$\cos(ax+b)$	$1+\tan^2 x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$F(x)$	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}$	$\frac{\sin(ax+b)}{a}$	$\tan x$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\arctan x$

3 / Propriétés des intégrales

3.1 Définition : Approximation d'une intégrale par la **méthode des rectangles**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout entier k
tel que $0 \leq k \leq n$ on pose $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$
et $I_n = \frac{b-a}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\ x_k\ )$ alors $\int_a^b f(t)\ dt = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

3.2 Théorème : **valeur moyenne d'une fonction**

Si f est une fonction continue sur $[a;b]$, alors il existe un réel c de $[a;b]$
tel que $\int_a^b f(t)dt = (b-a)f(c)$
Si $a \neq b$ le réel $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt$ est appelé valeur moyenne de f sur $[a;b]$

3.3 Théorèmes :

3.3.1 Si f est une fonction continue et paire sur $[-a;a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$
3.3.2 Si f est une fonction continue et impaire sur $[-a;a]$ alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

4 / Méthodes de calcul d'intégrales

4.1 Théorème : **Intégration par partie**

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbb{R}$
$\forall\ (a,b) \in I^2 \qquad \int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b v(t)u'(t)dt$

4.2 Théorème : **Changement de variable**

Soit u une **fonction $\mathbf{C}^1$** sur un segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ et
soit f une fonction continue sur $[u(a), u(b)]$

alors $\int_a^b f[u(t)]u'(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du.$

4.3 Définition : Intégrale d'une **fonction continue par morceaux**

Rappel : une fonction f est dite continue par morceaux sur un intervalle $[a,b]$ si
· sur $[a,b]$ il existe un nombre fini de points de discontinuité $x_i \quad i \in [[1,n]]$
· en chacun des x_i, la fonction f admet une limite finie à droite et à gauche.

Dans ces conditions: $\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)dt$

4.4 Propriété :

Etant donné une fonction f admettant des primitives, le calcul de $\int_a^b f(t)dt$ peut s'effectuer avec n'importe laquelle des primitives de f.

4.5 Définition : Intégrale d'une **fonction à valeurs complexes**

Soit f une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$.
$\forall\ x \in I,\ \ f(x) = \mathrm{Re}(f(x)) + i.\mathrm{Im}(f(x)).$
$\forall\ (a,b) \in\ I^2 \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \mathrm{Re}(f(x))dx + i.\int_a^b \mathrm{Im}(f(x))dx.$

Si $f(x)$ s'écrit $f(x) = re^{ix}$ alors $\int_a^b f(x)dx = \left[\dfrac{1}{i}re^{ix}\right]_a^b$

CHAPITRE : 24

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

GENERALISEES

1 / Equations différentielles linéaires du premier ordre

1.1 Définitions :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre, toute équation pouvant se ramener à la forme :

$$(E) \quad : \quad y' + a(x)y = b(x)$$

a et b étant deux fonctions connues, continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Résoudre l'équation (E), c'est déterminer toutes les fonctions f, C^1 sur un intervalle J inclus dans I , telles que $f(x) = y$ et $f'(x) = y'$.

Etant donné une équation (E) : $y' + a(x)y = b(x)$, l'équation : (E_0) : $y' + a(x)y = 0$ est appelée équation sans second membre (ESSM), ou équation homogène, associée à l'équation (E). L'équation (E) est alors appelée équation avec second membre (EASM)

1.2 Résolution de ESSM

1.2.1 Théorème :

Les solutions de L'ESSM sont de la forme $y_0(x) = Ce^{-A(x)}$ où $A(x)$ est une primitive de la fonction a sur I , et C une constante.

1.2.2 Théorème :

Pour tous λ et μ réels , si $y_0(x)$ et $z_0(x)$ sont deux solutions de (E_0) alors $\lambda y_0(x) + \mu\, z_0(x)$ est également une solution de (E_0).
L'ensemble des solutions d'une même équation homogène, muni des lois $+$ et $\cdot$ est stable par combinaison linéaire.

.

1.3 Résolution de EASM

Soit (E) : $y' + a(x)y = b(x)$

Soit $y_0(x)$ une solution générale de l'ESSM (E_0)

1.3.1 Théorème :

Si l'on peut aisément déterminer une solution particulière de (E)
Soit $y_1(x)$ une solution particulière de l'EASM (E) alors les solutions de (E) sont de la forme : $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$.

1.3.2 Théorème : méthode dite "de variation de la constante:"

Si l'on ne parvient pas à déterminer une solution particulière de (E),
on peut chercher les solutions de (E) sous la forme : $y(x) = C(x).e^{-A(x)}$
où C est une fonction de x à déterminer.

1.3.3 Théorème : méthode dite "de superposition:"

Si le second membre $b(x)$ **est une somme de fonctions** $b(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$
On résoud n équations (E_k) : $y' + ay = b_k$ dont on obtient les solutions $z_k(x)$
Les solutions de (E) sont $z(x) = \sum_{k=1}^{n} z_k(x)$.

2 / Equations différentielles linéaires du second ordre

2.1 Définitions :

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre, toute égalité pouvant se ramener à la forme :

$$(E) \quad : \quad y'' + ay' + by = h(x)$$

a et b étant des constantes réelles et h étant une fonction continue d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans ce cours, la fonction h est soit un polynôme soit une fonction exponentielle.

Résoudre l'équation (E), c'est déterminer toutes les fonctions f, C^2 sur un intervalle J inclus dans I vers $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, telles que : $f(x) = y$, $f'(x) = y'$ et $f''(x) = y''$

Etant donné une équation (E) : $y'' + ay' + by = h(x)$, l'équation : (E_0) : $y'' + ay' + by = 0$ est appelée équation sans second membre (ESSM), ou équation homogène, associée à l'équation (E). L'équation (E) est alors appelée équation avec second membre (EASM).

.

2.2 Résolution de l'ESSM

2.2.1 Théorème :

Pour tous λ et μ réels , si $y_0(x)$ et $z_0(x)$ sont deux solutions de (E_0)
alors $\lambda y_0(x) + \mu\ z_0(x)$ est également une solution de (E_0) .
L'ensemble des solutions d'une même équation homogène, muni des lois $+$ et $\cdot$ est stable par combinaison linéaire.

2.2.2 Théorème : détermination de $y_0(x)$

Soit $r^2 + ar + b = 0$, l'équation caractéristique (ou polynôme caractéristique) associé à l'équation (E_0) et soit Δ le discriminant de $r^2 + ar + b = 0$.

2.2.2.1 Si $\Delta > 0$:

L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes :
r_1 et r_2 $\quad (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$

Les solutions de (E_0) sont de la forme $y_0(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$,
$\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ou $\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, selon que l'on souhaite des solutions réelles ou complexes.

2.2.2.2 Si $\Delta = 0$:

L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{R}$ une solution double r.

Les solutions de (E_0) sont de la forme : $y_0(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}$
$\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ou $\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, selon que l'on souhaite des solutions réelles ou complexes.

2.2.2.3 Si $\Delta < 0$:

L'équation caractéristique n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais admet deux solutions distinctes complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.

Les solutions de (E_0) sont de la forme $y_0(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

Cependant il est préférable de présenter les solutions de (E_0) sous la forme :
$y_0(x) = (\ A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\ )e^{\alpha x} \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2$

Pour un emploi en physique, on écrira les solutions de (E_0) sous la forme :

$y_0(x) = R\cos(\ \beta x - \varphi\ )\ e^{\alpha x}$, avec $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ puis par identification : $\cos(\varphi) = \dfrac{A}{R}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{B}{R}$

.

2.3 résolution de l'EASM

2.3.1 Théorème :

Soit (E) : $y'' + ay' + by = h(x)$.
Soit $y_0(x)$ une solution générale de l'ESSM (E_0)
et soit $y_1(x)$ une solution particulière de l'EASM (E).
Les solutions de (E) sont de la forme : $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$.

2.3.2 Théorème : Détermination de $y_1(x)$

2.3.2.1 $1^{ère}$ méthode: $y_1(x)$ peut être une solution évidente de l'EASM.

2.3.2.2 $2^{ème}$ méthode: si $h(x) = P(x)$ (P polynôme):

alors on cherche $y_1(x)$ sous la forme $Q(x)$. Q étant un polynôme.
On calcule alors $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ puis on remplace dans (E) et l'on détermine alors le polynôme Q puis $y_1(x)$.

2.3.2.3 $3^{ème}$ méthode: si $h(x) = e^{mx}$ ($m \in \mathbb{R}$ ou $m \in \mathbb{C}$):

alors on cherche $y_1(x)$ sous la forme $Q(x).e^{mx}$. Q étant un polynôme.
On calcule alors $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ puis on remplace dans (E) et l'on détermine alors le polynôme Q puis $y_1(x)$.

2.3.2.4 $4^{ème}$ méthode: si $h(x) = P(x)e^{mx}$ ($m \in \mathbb{R}$ ou $m \in \mathbb{C}$ avec P polynôme):

alors on cherche $y_1(x)$ sous la forme $Q(x).e^{mx}$. Q étant un polynôme.
On calcule alors $y_1'(x)$, $y_1''(x)$ puis on remplace dans (E) et l'on détermine alors le polynôme Q puis $y_1(x)$.

2.3.2.5 $5^{ème}$ méthode: dite "de superposition:"

Si le second membre est une somme le principe de superposition peut être utilisé.

CHAPITRE : 25

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES

1 / Définitions

1.1 Définition :

On appelle **fonction des deux variables réelles** (x, y) à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute fonction $f : \left\{ \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{array} \right.$

1.2 Définition :

On appelle **domaine de définition** de f le sous ensemble D de $\mathbb{R}^2$ sur lequel la fonction f est définie pour chacune de ses variables. On note $D = D_1 \times D_2$.

1.3 Définition :

Dans l'espace, l'ensemble des points M dont les coordonnées sont $(x, y, f(x, y))$ est appelé **surface représentative** S de la fonction f (ou **nappe représentative).** On note parfois $z = f(x, y)$.

2 / Applications partielles

2.1 Définition :

Soit $f : \left\{ \begin{array}{c} D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{array} \right.$ Soit P un point de coordonnées $(x_0, y_0) \in D = D_1 \times D_2$, on appelle **applications partielles** de f en (x_0, y_0) les deux fonctions suivantes : $f_1 : \left\{ \begin{array}{c} D_1 \to \mathbb{R} \\ x \to f(x,y_0) \end{array} \right.$ et $f_2 : \left\{ \begin{array}{c} D_2 \to \mathbb{R} \\ y \to f(x_0,y) \end{array} \right.$ où x_0 et y_0 sont des constantes.

2.2 Propriété :

Dans l'espace, l'ensemble des points M dont les coordonnées sont $(x_0, y, f(x_0, y))$ est la section de la surface représentative S de la fonction f par le plan d'équation $x = x_o$.
Cette section est la représentation graphique de la fonction partielle $f(x_0, y)$.

De même, l'ensemble des points M dont les coordonnées sont $(x, y_0, f(x, y_0))$ est la section de la surface représentative S de la fonction f par le plan d'équation $y = y_o$.
Cette section est la représentation graphique de la fonction partielle $f(x, y_0)$.

.

3 / Dérivées partielles

Soit f une fonction de deux variables définie sur $D \subset \mathbb{R}^2$.
On appelle **dérivée partielle** de f par rapport à la variable x la fonction notée :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ou $f'_x(x,y)$ obtenue en dérivant f par rapport à la variable x. (y étant constant)
De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ou $f'_y\ (x,y)$ est obtenue en dérivant f par rapport à la variable y
(x étant alors constant).

4 / Fonctions de classe C^1

4.1 Définition :

Une fonction de variables réelles, définie sur $D \subset \mathbb{R}^n$ est dite C^1 si et seulement si toutes ses dérivées partielles sont continues sur D.
La notion de continuité est celle présentée pour les fonctions d'une variable réelle.

4.2 Propriétés :

4.2.1 Les polynômes et quotients de polynômes sont C^1 sur leur ensemble de définition.

4.2.2 La composée de fonctions de classes C^1 est C^1.
Attention aux domaines de définitions !

4.2.3 Toute combinaison linéaire ou produit de fonctions de classes C^1 est C^1.

4.3 Théorème : Dérivation d'une fonction composée :

Soit f une fonction de deux variables, C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$.
Soient x et y deux fonctions d'une variable réelle t, C^1 sur $I \subset \mathbb{R}$ telles que
$\forall\ t \in I, \quad (x(t), y(t)) \in D$
Soit g la fonction définie sur I par $g(t) = f(x(t), y(t))$.
Alors g est C^1 sur I et $\forall\ t \in I$, $g'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)).x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)).y'(t)$

5 / Equations aux dérivées partielles

Soit f une fonction de deux variables, C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$, connaissant
les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$, il est possible de déterminer
la fonction f "à une constante près".

6 / Petites variations au voisinage d'un point

Soit f une fonction de deux variables, C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$.
On appelle **différentielle** de f la fonction $df(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y).dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y).dy$.
Cette formule est utile aux physiciens : dx et dy représentent des accroissements infinitésimaux des variables x et y ; $df(x,y)$ est alors l'accroissement de $f(x,y)$ qui en résulte.
On peut également écrire cette formule sous la forme :
$\delta f = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).\delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).\delta y$.
Une petite variation de f autour de (x_0,y_0) est égale à la somme des produits de chaque dérivée partielle de f en (x_0,y_0) par la petite variation de la variable considée.

7 / Extrémum

7.1 <u>Définition</u> :

Soit f une fonction de deux variables, C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$.
Si f admet un extrémum en un point $M(x_0,y_0)$ alors :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$

7.2 <u>Attention</u> : la réciproque est fausse !

8 / Gradient

Soit f une fonction de deux variables, C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$.
On appelle **gradient** de f le vecteur dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont les dérivées partielles de f par rapport à chacune des variables.

$$\forall\ (x,y)\ \in\ D,\ \overrightarrow{grad}\ f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y); \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

9 / Dérivées partielles d'ordre 2

9.1 <u>Définition</u> :

Soit f une fonction de deux variables, C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$. Si les dérivées partielles de f sont également C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$ alors f est dite de classe C^2 sur $D \subset \mathbb{R}^2$.

$$\forall\ (x,y)\ \in\ D,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x,y) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x,y)$$

9.2 <u>Théorème de **Schwarz**</u> :

Si f est de classe C^2 sur $D \subset \mathbb{R}^2$ alors $\forall\ (x,y)\ \in\ D,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$

CHAPITRE : 26

VARIABLES ALEATOIRES REELLES

1 Variable aléatoire réelle :

1.1 Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini, on appelle **variable aléatoire réelle** toute application X définie de Ω vers $\mathbb{R}$.

$X \ : \left\{ \begin{array}{c} \Omega \to \mathbb{R} \\ \omega \to X(\omega) \end{array} \right.$ On note $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par X :

Une variable aléatoire est dite discrète si $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable.
Elle est dite discrète et finie si $X(\Omega)$ est un ensemble fini.
Elle est dite discrète et infinie si $X(\Omega)$ est un ensemble dénombrable et infini.

1.2 Restrictions :

Dans ce chapitre , $X(\Omega)$ est un ensemble fini donc : $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$
On parle alors de **variable aléatoire discrète sur un ensemble fini**.

1.3 Notations :

$\forall\ i \in\ \{1, 2, ..., n\}$, l'évènement $(X = x_i)$ est noté $X^{-1}(\{x_i\})$

$X^{-1}(\{x_i\}) = \{\omega\ ,\ \omega \in \Omega\ /\ X(\omega) = x_i\}$

$\forall\ (a, b) \in \mathbb{R}^2$, l'évènement $(a < X \leq b)$ est noté $X^{-1}(]a, b])$

$X^{-1}([a, b[) = \{\omega\ ,\ \omega \in \Omega\ /\ a \leq X(\omega) < b\}$

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, l'évènement $(X \leq x)$ est noté $X^{-1}(]-\infty, x])$

$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega\ ,\ \omega \in \Omega\ /\ X(\omega) \leq x\}$

1.4 Propriétés :

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ un espace probabilisable fini, soient X et Y deux v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, soit λ un nombre réel alors les applications :
$X + Y$, λX , XY , $\sup(X, Y)$ et $\inf(X, Y)$ sont des v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle :

2.1 Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Soit $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Définir la **loi de probabilité de la v.a.r** X c'est donner les valeurs de $P[X = x_i]$ pour tout i de $[[1; n]]$.
On parle aussi de **loi de distribution** de X.
Dans la pratique on ordonne $X(\Omega)$ sous forme d'une suite strictement croissante et l'on note souvent $p_i = P[X = x_i]$

2.2 Théorème :

La donnée de n couples (x_i, p_i) est la loi de probabilité d'une v.a.r. si et seulement si : $\begin{cases} \forall\ i\ \in [[1;n]]\ ,\ p_i \geq 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1 \end{cases}$

3 Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle :

3.1 Définition :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
On appelle **fonction de répartition** de la v.a.r. X, la fonction F définie par :
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ F(x) = P[X \leq x]$

3.2 Propriétés :

Soit F la fonction de répartition d'un v.a.r. X définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$
avec $X(\Omega) = \{x_1, x_{2,}......, x_n\}$ et $x_1 < x_2 < ...... < x_n$

3.2.1 $F(x) \in [0;1]$

3.2.2 F est croissante sur $\mathbb{R}$

3.2.3 $\forall\ (a,b)\ \in \mathbb{R}^2\ \ /\ a < b\ \Rightarrow\ F(b) - F(a) = P[a < X \leq b]$

3.2.4 $\forall\ x\ \in]-\infty, x_1[\quad F(x) = 0$

3.2.5 $\forall\ k\ \in [[1; n-1]]\quad \forall\ x\ \in [x_k, x_{k+1}[\quad F(x) = \sum\limits_{i=1}^{k} p_i$

3.2.6 $\forall\ x\ \in [x_n, +\infty[\quad F(x) = 1$

3.2.7 $\forall\ i\ \in [[2;n]]\quad p_i = F(x_i) - F(x_{i-1})$

4 Espérance d'une variable aléatoire réelle :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ admettant pour loi :
$\{(x_i, p_i)\ /\ 1 \leq i \leq n\}$

4.1 Définition :

On appelle **espérance mathématique** (ou moyenne) de X
le nombre réel : $E[X] = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i p_i$.

4.2 Définition :

Une variable d'espérance nulle est dite **variable centrée**.

4.3 Propriétés :

4.3.1 $\forall\ (a,b)\ \in \mathbb{R}^2\quad E[aX + b] = aE[X] + b$

4.3.2 $X \geq 0 \Longrightarrow E[X] \geq 0$

4.3.3 Cas d'une **variable certaine**
Si $X = c$ alors X est une v.a.r. certaine et $E[X] = c$

4.4 Théorème : dit "du transfert"

Soit X une v.a.r., si $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ alors $f(X)$ est une v.a.r. et $E[f(X)] = \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i) p_i$.

5 Moments, variance et écart type d'une variable aléatoire réelle :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

5.1 Définitions :

5.1.1 Soit $r \in \mathbb{N}^*$, on appelle **moment d'ordre** r de la v.a.r. X le nombre

$$m_r(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^r.p_i \qquad m_1(X) = E[X] \qquad m_2(X) = E[X^2]$$

5.1.2 On appelle **variance** de X le nombre $V(X) = E[(X - E[X])^2] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E[X])^2 p_i$

5.1.3 On appelle **écart type** de X le nombre réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

5.2 Remarques :

La variance de X est la moyenne pondérée des carrés des écarts de X à son espérance.
$\sigma(X)$ mesure donc la dispersion de X autour de son espérance $E[X]$.

5.3 Définition :

Si $V(X) = 1$ alors X est dite **variable réduite**

5.4 Propriétés :

5.4.1 $V(X) \geq 0$

5.4.2 Si X est **certaine** (ou constante) alors $V(X) = 0$.

5.4.3 Si $V(X) = 0$ alors $P(X = E[X]) = 1$, X est dite presque sûrement certaine

5.4.4 Formule de Huyghens-Koënig : $V(X) = E[X^2] - (E[X])^2$

5.4.5 $\forall\ (a, b)\ \in \mathbb{R}^2 \quad V(aX + b) = a^2 V[X]$

5.4.6 $\forall\ (a, b)\ \in \mathbb{R}^2 \quad \sigma(aX + b) = |a|\,.\sigma(X)$

5.4.7 Inégalité de Markov

Soit X une v.a.r. positive alors $\forall\ \lambda > 0$, $P(\ X\ \geq \lambda\ ) \leq \dfrac{E[X]}{\lambda}$.

5.4.8 Inégalité de Bienaymé-Tchébychev : $\forall\ \varepsilon > 0$, $P(\ |\ X - E[X]\ | \geq \varepsilon\ ) \leq \dfrac{V(X)}{\varepsilon^2}$

6 Lois usuelles :

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ admettant pour loi :
$\{(x_i, p_i)\ /\ 1 \leq i \leq n\}$

6.1 Loi uniforme sur $[[1; n]]$:

6.1.1 Définition :

X suit la loi uniforme si et seulement si : $\forall\ i\ \in [[1; n]] \qquad P[X = x_i] = \dfrac{1}{n}$

6.1.2 Propriétés :

Dans le cas particulier où : $X(\Omega) = \{1, ..., n\}$ alors $E[X] = \dfrac{n+1}{2}$

6.2 Loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$:

6.2.1 Définition :

Soit $p \in [0; 1]$. Une v.a.r. X suit la loi de Bernoulli de paramètre p si et seulement si : $X(\Omega) = \{0, 1\}$ avec $P[X = 1] = p$ et $P[X = 0] = 1 - p$. On pose $q = 1 - p$
On note une telle loi : $\mathcal{B}(1, p)$ et l'on écrit : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1, p)$

6.2.2 Interprètation :
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire n'ayant que deux issues possibles et effectuée une seule fois.
$X = 1$ si l'issue est un succès et $X = 0$ si l'issue est un échec.

6.2.3 Propriétés : Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(1,p)$ alors : $E[X] = p$ et $V[X] = p.q$

6.3 Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

6.3.1 Définition :
Soit $p \in [0;1]$ on pose $q = 1 - p$, la v.a.r. X suit la loi binomiale de paramètres n et p si et seulement si : $X(\Omega) = \{0, 1, ..., n\}$ avec : $\forall\ k \in [[0;n]]$
$P[X = k] = \binom{n}{k}.p^k.q^{n-k}$. On note une telle loi : $\mathcal{B}(n,p)$ et l'on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

6.3.2 Interprétation :
On considère une suite de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p. La v.a.r. X égale au nombre de succès obtenus, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

6.3.3 Domaine d'application :
Dans un ensemble $\mathcal{E}$ de N éléments on étudie un caractère C. Soit p la proportion d'éléments de $\mathcal{E}$ possédant ce caractère C;
Si on extrait au hasard, **avec ordre et remise**, une suite de n éléments de $\mathcal{E}$ alors la v.a.r. X qui indique le nombre d'éléments possédant le caractère fixé, suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

6.3.4 Propriétés : si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ alors : $E[X] = n.p$ et $V[X] = n.p.q$

6.4 Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$:

6.4.1 Définition :
Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0;1]$ / $N.p \in \mathbb{N}$, $q = 1 - p$.
Une v.a.r. X suit la loi **hypergéométrique** de paramètres
N , n et p si et seulement si : $X(\Omega) \subset \{0, 1, ..., n\}$
et $\forall\ k \in X(\Omega)$ $P[X = k] = \dfrac{\binom{N.p}{k}\binom{N.q}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
On note une telle loi : $\mathcal{H}(N,n,p)$ et l'on écrit $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$

6.4.2 Domaine d'application :
Dans un ensemble $\mathcal{E}$ de N éléments on étudie un caractère C. Soit p la proportion d'éléments de $\mathcal{E}$ possédant ce caractère C. Si l'on extrait une **poignée** de n éléments de $\mathcal{E}$ alors la v.a.r. X indiquant le nombre d'éléments possédant le caractère C, suit la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$

6.4.3 Propriétés : Si $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N,n,p)$ alors : $E[X] = n.p$

6.5 Approximation d'une loi hypergéométrique par une loi binomiale :

6.5.1 Théorème :
Lorsque N tend vers $+\infty$ la loi hypergéométrique $\mathcal{H}(N,n,p)$ converge vers la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

6.5.2 Condition d'approximation :

Dans la pratique cette approximation est possible dès que $N > 10.n$

CHAPITRE : 27

COUPLE ET SUITE DE V.A.R.

1 Loi conjointe d'un couple de variables aléatoires réelles :

1.1 Définition :

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$
On pose $X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ..., y_s\}$
On appelle **loi de probabilté du couple** (X,Y) ou **loi conjointe** de X et de Y les triplets (x_i, y_j, p_{ij}) avec $(i,j) \in [[1;r]] \times [[1;s]]$ et $p_{ij} = P[(X = x_i) \cap (Y = y_j)]$

1.2 Propriétés :

La donnée de triplets (x_i, y_j, p_{ij}) avec $(i,j) \in [[1;r]] \times [[1;s]]$ est la loi de probabilité

d'un couple de v.a.r. si et seulement si $\begin{cases} \forall\ (i,j) \in [[1;r]] \times [[1;s]] \quad p_{ij} \geq 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{r} \sum\limits_{j=1}^{s} p_{ij} = 1 \end{cases}$

2 Lois marginales d'un couple de variables aléatoires réelles :

2.1 Définition :

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Chacune des lois X et Y est appelée **variable marginale du couple** (X,Y) .
Les lois des v.a.r. X et Y sont appelées **lois marginales** .
On note ces lois : $P[X = x_i] = p_{i\bullet}$ et $P[Y = y_j] = p_{\bullet j}$

2.2 Propriétés :

Connaissant la loi de probabilité d'un couple de v.a.r. (X,Y), on détermine les lois de X et Y en posant : $\forall\ i \in [[1;r]]$, $p_{i\bullet} \ = \ P[X = x_i] = \sum\limits_{j=1}^{s} p_{ij}$ et

$\forall\ j \in [[1;s]]$, $p_{\bullet j} \ = \ P[Y = y_j] = \sum\limits_{i=1}^{r} p_{ij}$

3 Lois conditionnelles d'un couple de variables aléatoires réelles :

3.1 Définition :

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ on appelle :

- Loi conditionnelle de X sachant $(Y = y_j)$, la donnée pour tout x_i de :
  $$P[\ (X = x_i)\ /\ (Y = y_j)\ ] = \frac{P[\ (X = x_i) \cap (Y = y_j)\ ]}{P[Y = y_j]} = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

- Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x_i)$, la donnée pour tout y_j de :
  $$P[\ (Y = y_j)\ /\ (X = x_i)\ ] = \frac{P[\ (X = x_i) \cap (Y = y_j)\ ]}{P[X = x_i]} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

4 Somme , produit et image d'un couple de variables aléatoires réelles :

4.1 Définition : **loi de la somme et du produit**

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$,
$P[X + Y = z] = \sum\limits_{x_i + y_j = z} P[\ (X = x_i) \cap (Y = y_j)\ ]$ et
$P[X \times Y = z] = \sum\limits_{x_i \times y_j = z} P[\ (X = x_i) \cap (Y = y_j)\ ]$

4.2 Propriété : **espérance de l'image ou "théorème du transfert"**

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, soit u une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$. Si Z est la v.a.r. définie par : $Z = u(X, Y)$

alors $E[\ Z\ ] = \sum\limits_{x_i \in X(\Omega)} \left(\sum\limits_{y_j \in Y(\Omega)} u(x_i, y_j) p_{ij} \right)$

4.2.1 en particulier : $E[\ X \times Y\ ] = \sum\limits_{i=1}^{r} \left(\sum\limits_{j=1}^{s} x_i \times y_j \times p_{ij} \right)$

4.3 Propriété : **linéarité de l'espérance**

$(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad E[\ \lambda.X + \mu.Y\ ] = \lambda.E[\ X\ ] + \mu.E[\ Y\ ]$

5 Covariance, coefficient de corrélation linéaire :

5.1 Définition :

Soit (X, Y) un couple de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$,
On appelle **covariance** de X et Y le nombre : $cov(X, Y) = E[(X - E(X)).(Y - E(Y))]$

5.2 Propriétés :

5.2.1 $cov(X, Y) = cov(Y, X)$

5.2.2 $V(X) = cov(X, X)$

5.2.3 $cov(X, Y) = E[XY] - E[X].E[Y]$ ou $E[XY] = E[X].E[Y] + cov(X, Y)$

5.2.4 $\forall\ (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \quad cov(aX + b, cY + d) = a.c.cov(X, Y)$

.

5.2.5 $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2.cov(X,Y)$

5.2.6 $V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2.cov(X,Y)$

5.2.7 $\forall\ (a,b)\ \in \mathbb{R}^2\ \ V(a.X+b.Y) = a^2.V(X) + b^2.V(Y) + 2.a.b.cov(X,Y)$

5.3 Définition :

Soient X, Y deux v.a.r. d'écarts types non nuls.
On appelle coefficient de corrélation linéaire des v.a.r. X et Y le nombre :
$\rho(\ X,Y\ ) = \dfrac{cov(X,Y)}{\sigma(X).\sigma(Y)}$

5.4 Propriétés :

5.4.1 $\forall\ (a,b,c,d)\ \in \mathbb{R}^4\ \ \rho(\ a.X+b, cY+d\ ) = \varepsilon.\rho(\ X,Y\ )$
avec $\varepsilon = 1$ si $a.c > 0$ et $\varepsilon = -1$ si $a.c < 0$

5.4.2 On a toujours $-1 \leq \rho(X,Y) \leq 1$

5.4.3 $\mid \rho(X,Y) \mid = 1$ si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que:
$P\ (\ Y = aX+b\ ) = 1$

6 Indépendance d'un couple de variables aléatoires réelles :

6.1 Définition :

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. les v.a.r. X et Y sont dites indépendantes si $\forall\ i \in [[1;r]]$ et $\forall\ j \in [[1;s]]$ on a :
$P[\ (X = x_i) \cap (Y = y_j)\ ] = P[\ X = x_i] \times P[Y = y_j]$

6.2 Propriétés :

Soit (X,Y) un couple de v.a.r.

6.2.1 (X,Y) indépendantes $\Longrightarrow E[\ X \times Y\ ] = E[\ X\ ] \times E[\ Y\ ]$

6.2.2 (X,Y) indépendantes $\Longrightarrow cov[X,Y] = 0$

6.2.3 (X,Y) indépendantes $\Longrightarrow V[\ X+Y\ ] = V[\ X\ ] + V[\ Y\ ]$

6.2.4 (X,Y) indépendantes $\Longrightarrow V[\ X-Y\ ] = V[\ X\ ] + V[\ Y\ ]$

6.2.5 (X,Y) indépendantes $\Longrightarrow \rho(X,Y) = 0$

6.3 Propriété :

Soit (X,Y) un couple de v.a.r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
Soit f et g deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$
alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont deux v.a.r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

7 Généralisation au cas de n variables aléatoires réelles :

7.1 Définition :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

La **loi de probabilité du vecteur aléatoire** $(X_1, X_2, ..., X_n)$ ou **loi conjointe** des n v.a.r. $X_1, X_2, ..., X_n$ est l'ensemble :

$$\left\{ \left((x_1, x_2, ..., x_n) \ , \ P\left[\bigcap_{i=1}^{n} (X_i = x_i) \right] \right) \ / \ \forall\ i \in [[1, n]] \ , \ x_i \ \in \ X_i(\Omega) \right\}$$

La loi de la v.a.r. X_i est appelée **loi marginale de** X_i.

7.2 Définition : **Espérance d'une somme**

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ n réels,

$$E\left[\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i . X_i)\right] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . E\left[X_i\right]$$

7.3 Définition :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Les variables $X_1, X_2, ..., X_n$ sont dites **deux à deux indépendantes lorsque :**

$\forall\ (i, j) \in [[1, n]]^2 \ \ i \neq j \quad X_i$ et X_j sont indépendantes. C'est à dire :

$P\left[(X_i = x_i) \cap (X_j = x_j)\right] = P\left[(X_i = x_i)\right] \times P\left[(X_j = x_j)\right]$

7.4 Définition :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

Les variables $X_1, X_2, ..., X_n$ sont dites **mutuellement indépendantes lorsque :**

toute sous famille $(X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_k})$ de k v.a.r. extraites de $(X_i)_{1 \le i \le n}$ vérifie

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{i=k} (X_i = x_i)\right] = \prod_{i=1}^{i=k} P(X_i = x_i).$$

Remarque : Si des v.a.r. sont muellements indépendantes alors elle le sont deux à deux. La réciproque est fausse.

7.5 Propriété :

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ sont n **v.a.r. de Bernouilli indépendantes et de même paramètre** p définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ alors la v.a.r $\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit la loi binomiale de paramètres n et p

7.6 Propriété :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.
alors toute sous famille extraite est également indépendante.

7.7 Propriété :

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r. indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$.

7.7.1 Soit f et g deux fonctions numériques
alors $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ et $g(X_1, X_2, ..., X_n)$ sont deux v.a.r. indépendantes.

7.7.2 Soit $p \in [[1, n]]$ et soit $(f_i)_{1 \le i \le p}$ une famille de p fonctions numériques
alors $f_1(X_1), f_2(X_2), ..., f_p(X_p)$ sont indépendantes.

7.8 Propriété : **variance d'une somme de** n **v.a.r.**

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a.r. définies sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2.\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} cov(X_i, X_j)$$