**CHAPITRE : 1**

**VOCABULAIRE LOGIQUE,**

**VOCABULAIRE DES ENSEMBLES .**

# 1 / Vocabulaire logique :

## 1.1 Appartenance :

Soit $E$ un ensemble d'objets,
si $x$ est un élément de $E$ on dit que $x$ appartient à $E$ et l'on note $x \in E$,
si $x$ n'appartient pas à $E$ on note $x \notin E$.

## 1.2 Logique élémentaire :

**Assertion** : Une assertion est un enoncé mathématique auquel on peut attribuer la valeur vrai ou faux, mais jamais les deux à la fois.

Notions de "**et**", notions de "**ou**"

Notions d'**implication** et d'**équivalence**

$\forall$ (**quelque soit**): $E = F \iff \forall x \ , \ x \in E \iff x \in F$

$\exists$ (**il existe**) : $\exists \ x \in \mathbb{R} \ \ / \ x \notin \ \mathbb{N}$

$\exists \, !$ (**il existe un unique**) : $\exists \, ! \ x \in \mathbb{R}^+ \ \ / \ x^2 = 4$

Notions de **négation :** Si une assertion est vraie alors sa négation est fausse et réciproquement.

**Réciproque** : La réciproque de $(p \Longrightarrow q)$ est $(q \Longrightarrow p)$

**Contraposée** : la contraposée de $(p \Longrightarrow q)$ est ( non $q \Longrightarrow$non $p$ )

**Négation** d'une assertion quantifiée

## 2 / Vocabulaire des ensembles :

### 2.1 Inclusion :

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.
On dit que $E$ est une partie de $F$ ou que $E$ est inclus dans $F$ si tous les éléments de $E$ sont également éléments de $F$. On note : $E \subset F \Longleftrightarrow \forall x \ , \ x \in E \Longrightarrow x \in F$
$E$ n'est pas inclus dans $F$ se traduit par : $\exists \ x \in E$ et $x \notin F$

2.1.1 Notation: $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de toutes les **parties de** $E$.

2.1.2 Propriétés

2.1.2.1 $E \subset F$ et $F \subset E \Longleftrightarrow E = F$

2.1.2.2 $E \subset F$ et $F \subset G \Longrightarrow E \subset G$

### 2.2 Intersection, union :

Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles, soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $(E_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille d'ensembles

· intersection : $E \cap F = \{x \in E \ \text{ et } \ x \in F\}$
$$x \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} E_i \iff \forall \ i \in [[1, n]] \ , \ x \in E_i$$

· union : $E \cup F = \{x \in E \ \text{ ou } \ x \in F\}$
$$x \in \bigcup_{1 \leq i \leq n} E_i \iff \exists \ i \in [[1, n]] \ \ / \ \ x \in E_i$$

2.2.1 Propriétés

2.2.1.1 $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ et $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$

2.2.1.2 $E \cap E = E \qquad E \cup E = E \qquad E \cap \emptyset = \emptyset \qquad E \cup \emptyset = E$

### 2.3 Complémentaire :

Soit $E$ un ensemble, soient $A$ et $B$ deux sous ensembles de $E$, soit $n \in \mathbb{N}$,
et $(F_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de sous ensembles de $E$.
Le complémentaire de $A$ dans $E$ est noté $\mathcal{C}_E A$ ou $E \smallsetminus A$ ou $\overline{A}$ , c'est l'ensemble des éléments de $E$ qui ne sont pas éléments de $A$. $\quad x \in \mathcal{C}_E A \Longleftrightarrow x \in E$ et $x \notin A$

2.3.1 Propriétés

2.3.1.1 $\overline{\overline{A}} = A \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.3.1.2 Lois de Morgan : $\overline{\bigcap_{1 \leq i \leq n} F_i} = \bigcup_{1 \leq i \leq n} \overline{F_i}$ et $\overline{\bigcup_{1 \leq i \leq n} F_i} = \bigcap_{1 \leq i \leq n} \overline{F_i}$

.

### 2.4 Système complet :

Une famille $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ de parties d'un ensemble $E$ est un système complet de $E$ si

· $\forall (i,j)\in [[1,n]]^2 \quad i\neq j \implies A_i\cap A_j=\emptyset$
· $\underset{1\leq i\leq n}{\cup} A_i = E$

### 2.5 Différence, différence symétrique :

Soient $A$ et $B$ deux parties de $E$
· Différence : $A\setminus B = A\cap \mathcal{C}_E B = \{x\in A \ / \ x\notin B\}$
· Différence symétrique : $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$

### 2.6 Produit cartésien :

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Le produit cartésien de $E$ par $F$ est noté $E\times F$, c'est l'ensemble des couples $(x,y)$ avec $x\in E$ et $y\in F$.
Si $(E_i)_{i\in[[1;n]]}$ est une famille de $n$ ensembles, le produit cartésien $E_1\times E_2\times ....\times E_n$ est noté $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i = \{\ (x_1,x_2,...,x_n)\ /\ \forall i\in[[1;n]]\ ,\ x_i\in E_i\ \}$.

par définition $E^n = \underbrace{E\times E\times ....\times E}_{n\ facteurs}$

Les éléments de $E^n$ sont appelés $n-listes$ ou $n-uplets$

### 2.7 Inégalités et ensembles :

Dans tout ce paragraphe :
· $E$ est un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$
· $A$ est un sous ensemble de $E$

#### 2.7.1 Majorant, minorant :

Un élément $x$ de $E$ est un majorant de $A$ si et seulement si : $\forall\ a\in A,\ a\leq x$
Un élément $x$ de $E$ est un minorant de $A$ si et seulement si : $\forall\ a\in A,\ a\geq x$

.

### 2.7.2 Plus grand et plus petit élément

S'il existe un élément $x$ de $A$ qui majore $A$, alors il est appelé plus grand élément de $A$.
S'il existe un élément $x$ de $A$ qui minore $A$, alors il est appelé plus petit élément de $A$.
Attention : le plus petit ou le plus grand élément de $A$ n'existent pas toujours.

### 2.7.3 Partie bornée :

On dit que l'ensemble $A$ est majoré (resp. minoré) si et seulement s'il existe au moins un majorant (resp. minorant) de $A$ dans $E$.
On dit que $A$ est borné (dans $E$) si et seulement si $A$ est majoré et minoré (dans $E$).
Remarque: l'ensemble vide est une partie bornée de $E$.

### 2.7.4 Borne supérieure, inférieure :

Dans $\mathbb{R}$, toute partie $A$, non vide et majorée admet un plus petit majorant.
Il est appelé borne supérieure de $A$. On le note $\sup(A)$
De même, le plus grand des minorants de $A$ est appelé borne inférieure de $A$ et noté $\inf(A)$

**CHAPITRE : 2**

**NOMBRES ENTIERS,**

**REELS ET COMPLEXES.**

# 1 / Les nombres entiers :

## 1.1 Rappels :

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

## 1.2 Raisonnement par récurrence :

### 1.2.1 Théorème : ($1^{ère}$ forme )

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier $n$. Si l'on démontre que :
· $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vérifiée (souvent $n_0 = 0$ ou $n_0 = 1$)
· Pour tout entier $n \geq n_0$, si $P(n)$ est vérifiée alors $P(n+1)$ est vérifiée
Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$

### 1.2.2 Théorème : ($2^{ème}$ forme ) dite "récurrence forte"

Soit $P(n)$ une propriété dépendant de l'entier $n$. Si l'on démontre que :
· $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$ est vérifiée.
· Pour tout entier $n \geq n_0$ et **pour tout entier** $k$ tel que : $n_0 \leq k \leq n$
$P(k)$ vraie entraine $P(n+1)$ vraie
Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n$ .

# 2 / Les nombres réels :

## 2.1 Intervalle :

On appelle intervalle, toute partie $I$ de $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété suivante :
$\forall\ (x, y) \in I^2, \forall\ z \in \mathbb{R}\ \ (x \leq z \leq y \Rightarrow z \in I)$

.

## 2.2 Valeur absolue :

### 2.2.1 Définition :

Pour tout nombre réel $x$, on appelle valeur absolue de $x$, notée $|x|$ , le nombre réel défini par : $|x| = x$ si $x > 0$
$|x| = -x$ si $x < 0$
$|0| = 0$

### 2.2.2 Propriété :

$|x - a| \leq r \quad \Leftrightarrow \quad a - r \leq x \leq a + r$

## 2.3 Partie entière :

### 2.3.1 Définition :

Pour tout nombre réel $x$, on appelle partie entière de $x$, notée $\lfloor x \rfloor$ , le nombre entier $n$ tel que $n \leq x < n + 1$.
Anciennement la partie entière de $x$ était notée $E(x)$ ou $[x]$.

### 2.3.2 Propriété :

$x \in \mathbb{N} \quad \Leftrightarrow \quad x = \lfloor x \rfloor$

## 2.4 Exposant, racine carrée :

### 2.4.1 Puissances entières :

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad x^n = \underbrace{x \times x \times x .... \times x}_{n \quad fois}$$

### 2.4.2 Puissances entières négatives :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}^*,\ \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

### 2.4.3 Propriétés :

$\forall\ (x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2,\ \forall\ (n, m) \in \mathbb{Z}^2$,

- $(x.y)^n = x^n.y^n$
- $x^{n+m} = x^n.x^m$
- $(x^n)^m = x^{n.m}$

$\forall\ (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$

- $\sqrt{x^2} = |x|$
- $\sqrt{x.y} = \sqrt{x}.\sqrt{y}$

2.5 Identités remarquables :

2.5.1 : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{C}^2,\quad (a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$
2.5.2 : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{C}^2,\quad (a-b)^2 = a^2 - 2.a.b + b^2$
2.5.3 : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{C}^2,\quad (a-b).(a+b) = a^2 - b^2$
2.5.4 : Triangle de Pascal
2.5.5 : Formule du binôme de Newton :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2 \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N} \qquad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

2.5.6 : $\forall\ (a,b) \in \mathbb{C}^2,\quad a^n - b^n = (a-b).(a^{n-1}b^0 + a^{n-2}b^1 + a^{n-3}b^2 + .....a^1b^{n-2} + a^o b^{n-1})$

2.6 Manipulation des inégalités :

$\forall\ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\ ,\quad a < b \text{ et } c < d \Rightarrow a + c < b + d$
$\forall\ (a,b,c,d) \in (\mathbb{R}^+)^4\ ,\quad 0 < a < b \text{ et } 0 < c < d \Rightarrow 0 < a.c < b.d$
$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ c \in \mathbb{R}^+\ ,\quad a < b \Rightarrow a.c < b.c$
$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ c \in \mathbb{R}^-\ ,\quad a < b \Rightarrow a.c > b.c$
$\forall\ (a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2\ ,\quad 0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$
$\forall\ (a,b) \in (\mathbb{R}^+)^2,\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\quad 0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n$

## 3 / Les nombres complexes :

3.1 Définition :

On appelle nombre complexe, tout nombre s'écrivant de manière unique , $z = a + ib$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $i^2 = -1$, $a = \text{Re}(z)$ est appelé partie réelle du complexe, et $b = \text{Im}(z)$ est appelé partie imaginaire du complexe
$a + ib$ est appelée forme algébrique du nombre complexe $z$

3.2 Règles de calculs :

$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2$ avec $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ on $a$
· $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
· $z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

3.3 Nombres complexes conjugués :

3.3.1 Définition :

On appelle nombre complexe conjugué de $z = x + iy$ le nombre $\overline{z} = x - iy$

3.3.2 Propriétés : $\forall\ (z,z') \in \mathbb{C}^2, \forall\ t \in \mathbb{R}$ :

3.3.2.1 $\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \qquad \overline{\overline{z}} = z \qquad z \times \overline{z} = x^2 + y^2 \qquad \overline{t.z} = t.\overline{z}$

3.3.2.2 $\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ \overline{z^n} = (\overline{z})^n \qquad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} \qquad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$

3.3.2.3 $\text{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) \qquad \text{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

3.2.2.4 $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z} \qquad z \in i\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$

## 3.4 Représentation géométrique :

### 3.4.1 Définitions :

Soit $\mathcal{P}$ ,le plan rapporté au repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et $\overrightarrow{\mathcal{V}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{P}$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{P} & \xrightarrow{\varphi} & \overrightarrow{\mathcal{V}} \\ z = x + iy & \longrightarrow & M(x,y) & \longrightarrow & \overrightarrow{OM} \end{array}$$

$$\varphi \circ \psi$$

Les applications $\varphi$ , $\psi$ *et* $\varphi \circ \psi$ sont trois bijections.
Le nombre complexe $z$ est appelé affixe du point $M$ et affixe du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
Le point $M$ est appelé image du complexe $z$

### 3.4.2 Propriétés :

Si $z$ est l'affixe d'un point $M$ et $z'$ l'affixe d'un point $M'$ alors

3.4.2.1 $z + z'$ est l'affixe du point $N$ défini par $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$.

3.4.2.2 $z' - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

## 3.5 Module d'un nombre complexe:

### 3.5.1 Définition :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe d'image $M$. On appelle module du nombre complexe $z$ la longueur $OM = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ et l'on note $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

### 3.5.2 Propriétés : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$

$|z| \in \mathbb{R}^+$ $\qquad |\overline{z}| = |z|$ $\qquad |z|^2 = z \times \overline{z}$ $\qquad |z \times z'| = |z| \times |z'|$

$\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$ $\qquad \left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ $\qquad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

### 3.5.3 Inégalités :

3.5.3.1 $1^{ère}$ inégalité triangulaire $\quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |\, z + z' \,| \leq |z| + |z'|$

3.5.3.2 $2^{ème}$ inégalité triangulaire $\quad \forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |\, |z| - |z'| \,| \leq |z - z'|$

3.5.3.3 Interprétation géométrique des inégalités triangulaires :

$$\forall (M, M') \in \mathcal{P}^2 \quad \left|\, \left\|\overrightarrow{OM}\right\| - \left\|\overrightarrow{OM'}\right\| \,\right| \leq \left\|\overrightarrow{MM'}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{OM}\right\| + \left\|\overrightarrow{OM'}\right\|$$

### 3.5.4 Propriété : Complexes de module 1

Si $|z| = 1$ alors $z \times \overline{z} = 1$ et $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$

## 3.6 Argument d'un nombre complexe:

### 3.6.1 Définition :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul d'image $M$. On appelle argument du nombre complexe $z$ toute mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}})$ Si $\alpha$ est l'une de ces mesures, on note $arg(z) = \alpha[2\pi]$ ou encore $arg(z) = \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$.

### 3.6.2 Propriété :

Si $z = x + iy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $arg(z) = \alpha[2\pi]$ alors $x = |z|\cos\alpha$ et $y = |z|\sin\alpha$ soit encore $\cos\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $et$ $\sin\alpha = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

## 3.7 Formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe:

### 3.7.1 Définition :

Tout nombre complexe non nul de forme algébrique :$z = x + iy \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$
admet pour écriture sous forme trigonométrique : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$
et pour écriture sous forme exponentielle complexe : $z = re^{i\theta}$
avec $|z| = r$ et $arg(z) = \theta[2\pi]$

### 3.7.2 Propriété :

3.7.2.1 $re^{-i\theta} = r(\cos\theta - i\sin\theta)$

3.7.2.2 Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ alors $z \times z' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$

3.7.2.3 $\forall\ z \in \mathbb{C}^*$ si $z = re^{i\theta}$ alors $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$

### 3.7.3 Propriétés :

3.7.3.1 $arg(z \times z') = (arg(z) + arg(z'))\,[2\pi]$

3.7.3.2 $arg(z^n) = n \times arg(z)[2\pi]$

3.7.3.3 $arg(\dfrac{1}{z}) = -arg(z)[2\pi]$

3.7.3.4 $arg(\dfrac{z}{z'}) = (arg(z) - arg(z'))\,[2\pi]$

3.7.3.5 $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}^+ \qquad arg(\lambda z) = arg(z)[2\pi]$

3.7.3.6 $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}^- \qquad arg(\lambda z) = (\pi + arg(z))\,[2\pi]$

### 3.7.4 Propriété : Formule de Moivre

$$\forall\ n \in \mathbb{Z} \quad (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha \Longleftrightarrow \left(e^{i\alpha}\right)^n = e^{in\alpha}$$

### 3.7.5 Propriété : Formule d'Euler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

#### 3.7.6 Définition : Fonction exponentielle complexe

Soit $z$ un nombre complexe de forme algébrique $z = a + ib$. On appelle exponentielle de $z$ le nombre complexe non nul noté $e^z$ défini par :
$e^z = e^{a+ib} = e^a.e^{ib} = e^a.(\cos b + i \sin b)$

#### 3.7.7 Propriété :

$\forall\ (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad e^{z+z'} = e^z.e^{z'}$

#### 3.7.8 Application :

$\forall\ m \in \mathbb{C}\ ,\ \forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \dfrac{d}{dx}(e^{mx}) = m.e^{mx}$

### 3.8 Racines carrées d'un nombre complexe:

Soit $Z$ un nombre complexe. On cherche $z$ tel que $z^2 = Z$

#### 3.8.1 Méthode trigonométrique :

Si $Z = Re^{i\theta}$ on cherche $z$ sous la forme $z = re^{i\alpha}$
alors $r = \sqrt{R}$ et $\alpha = \dfrac{\theta}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ donc il existe deux solutions :
$z_1 = \sqrt{R}e^{i\theta/2}$ et $z_2 = \sqrt{R}e^{i(\theta/2)+\pi}$ remarque : $z_1 = -z_2$

#### 3.8.2 Méthode algébrique :

Si $Z = a + ib$ on cherche $z = x + iy$

alors $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ 2xy = b \end{cases}$ puis on résoud ce système pour déterminer $x$ et $y$

### 3.9 Equations du second degrés à coéfficients réels :

#### 3.9.1 Cas général :

$(E)$ : $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on pose $\Delta = b^2 - 4ac$

- si $\Delta > 0$ , alors les deux solutions sont réelles et de la forme :
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad et \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$$
- si $\Delta = 0$ , alors il y a une solution double, réelle $\quad x = \dfrac{-b}{2a} \qquad x \in \mathbb{R}$
- si $\Delta < 0$ , alors on pose $\Delta = i^2 \times (-\Delta)$ avec $-\Delta > 0$ les deux solutions sont des nombres complexes de la forme :
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad et \qquad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \qquad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$$

.

### 3.9.2 Propriété :

3.9.2.1 $\forall\ \Delta \neq 0$ on a $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 \times z_2 = \frac{c}{a}$

3.9.2.2 En posant $S = z_1 + z_2$ et $P = z_1 \times z_2$ on détermine $z_1$ et $z_2$ en résolvant $z^2 - Sz + P = 0$

## 3.10 Racines n$^{ième}$ d'un nombre complexe :

Hors programme ! Mais il faut se souvenir que :

· $z^2 = 1$ admet deux solutions $sol = \{1; -1\}$

· $z^3 = 1$ admet trois solutions $sol = \{1; j; j^2\}$ avec $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$ et $j^2 = \overline{j} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{4i\pi/3}$ et $1 + j + j^2 = 0$

· $z^n = 1$ admet $n$ solutions de la forme $z_k = e^{i2k\pi/n}$ $k \in [[0; n-1]]$

**CHAPITRE : 3**

**TRIGONOMETRIE**

## 1 / Définitions géométriques :

1.1 Le cercle trigonométrique et les projections sur les axes :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

1.2 Périodicités et symétries des fonctions trigonométriques :

$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ k \in \mathbb{Z}$ :

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)\ ,\ \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)\ ,\ \tan(x + k\pi) = \tan(x)$$

$$\sin(-x) = -\sin(x)\ ,\ \sin(\pi + x) = -\sin(x)\ ,\ \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)\ ,\ \sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$$

$$\cos(-x) = \cos(x)\ ,\ \cos(\pi + x) = -\cos(x)\ ,\ \cos(\pi - x) = -\cos(x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)\ ,\ \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$$

$$\tan(-x) = -\tan(x)\ ,\ \tan(\pi + x) = \tan(x)\ ,\ \tan(\pi - x) = \tan(x)$$

## 2 / Les formules d'Euler :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

## 3 / Somme, différence :

3.1 $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \qquad \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3.2 $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \qquad \sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

3.3 $\sin 2a = 2 \sin a \cos a \qquad \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$

.

## 4 / Résolutions d'équations trigonométriques simples :

$$\cos(x) = c \;\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos(c) + 2k\pi \\ \qquad ou \\ x = -\arccos(c) + 2k\pi \end{cases} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, c \in [-1;1]\ ,\ \arccos(c) \in [0;\pi]$$

$$\sin(x) = s \;\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin(s) + 2k\pi \\ \qquad ou \\ x = \pi - \arcsin(s) + 2k\pi \end{cases} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, s \in [-1;1]\ ,\ \arcsin(s) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\tan(x) = t \;\Leftrightarrow x = \arctan(t) + k\pi \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z},\ \forall\, t \in \mathbb{R}\ ,\ \arctan(t) \in \mathbb{R}$$

## 5 / Transformation de $a\cos\theta + b\sin\theta$ en $r\cos(\theta+\varphi)$ :

$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $\forall\ \theta \in \mathbb{R}$ : $r = \sqrt{a^2+b^2}$ , $\cos\varphi = \dfrac{a}{r}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{b}{r}$

## 6 / Résolution de $a\cos\theta + b\sin\theta$ =c :

Transformer $a\cos\theta + b\sin\theta$ en $r\cos(\theta+\varphi)$ puis résoudre $r\cos(\theta+\varphi) = c$

## 7 / Linéarisation de $\cos^n x.\sin^n x$ :

Tranformation de $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ en une fonction de $\cos(ax)$ et $\sin(bx)$
Méthode :

La formule d'Euler permet d'écrire :
$\cos^n x = \left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ ou $\sin^n x = \left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$
puis on développe $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n$ ou $\left(\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

**CHAPITRE : 4**

**SOMMES, PRODUITS, SUITES USUELLES**

# 1 / Notation $\sum$

## 1.1 Sommes des $n$ premiers entiers et des $n$ premiers carrés:

1.1.1 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

1.1.2 Attention $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \neq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} i}$

1.1.3 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

## 1.2 Régles de calcul sur le symbole $\sum$ :

1.2.1 Cas particuliers de $\sum$

$$\forall\ (i,k,n) \in \mathbb{N}^3 \qquad \sum_{i=n}^{n-k} a_i = 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} 1 = n \qquad \sum_{i=0}^{n} 1 = n+1$$

1.2.2 Linéarité de $\sum$

$$\forall\ (\lambda,\mu) \in\ \mathbb{C}^2 \quad \forall\ i \in \mathbb{N} \qquad \sum_{i}(\lambda.a_i + \mu.b_i) = \lambda \sum_{i} a_i + \mu \sum_{i} b_i$$

Attention $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i.b_i \neq \sum_{i=1}^{n} a_i.\sum_{i=1}^{n} b_i$

1.2.3 Changement d'indices dans $\sum$

$$\forall\ (i,j,k,n) \in \mathbb{N}^4 \qquad \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=k}^{n+k} a_{j-k}$$

1.2.4 Télescopage dans $\sum$

$$\forall\ (i,n) \in \mathbb{N}^2 \qquad \sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_n - a_0$$

## 1.3 Sommes doubles $\sum\sum$

1.3.1 Sommes doubles à indices indépendants

$$\forall\ (i,j,n) \in \mathbb{N}^3 \qquad \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j})$$

1.3.2 Sommes doubles à indices dépendants

$$\forall\ (i,j,n) \in \mathbb{N}^3 \qquad \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{j} a_{i,j})$$

## 2 / Notation $\prod$

### 2.1 Régles de calcul sur le symbole $\prod$ :

#### 2.1.1 Cas particuliers de $\prod$

$$\forall\ (i,k,n) \in \mathbb{N}^3 \quad \prod_{i=n}^{n-k} a_i = 1 \qquad \prod_{i=1}^{n} 1 = 1$$

#### 2.1.2 Multiplicativité de $\prod$

$$\forall\ (i,n) \in\ \mathbb{N}^2 \qquad \prod_{i=1}^{n} (a_i.b_i) = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right).\left(\prod_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Attention $\prod_{i=1}^{n} \lambda.a_i = \lambda^n. \prod_{i=1}^{n} a_i$

#### 2.1.3 Relations avec les factorielles

$$\forall\ (i,n) \in\ \mathbb{N}^2 \qquad \prod_{i=1}^{n} i = n! \qquad \prod_{i=0}^{0} i = 0! = 1$$

## 3 / Notions de suites

### 3.1 Définition Opérations sur les suites

Deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont égales si $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = v_n$
On appelle somme (resp. produit) de deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ la suite de terme général $u_n + v_n$, (resp $u_n \times v_n$ )
Lorsque les termes de la suite $(v_n)$ ne sont pas nuls, on appelle suite quotient la suite de terme général $(\dfrac{u_n}{v_n})$
On appelle produit de la suite $(u_n)$ par le réel $\lambda$ (scalaire) la suite $(\lambda.u_n)$

## 4 / Les suites classiques

### 4.1 Suites arithmétiques:

#### 4.1.1 Définition :

$\exists\ r \in \mathbb{R}\ ,\forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$ forme récurrente
$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr$ forme explicite

#### 4.1.2 Propriétés :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{avec} \quad a \leq b \qquad \sum_{i=a}^{b} u_i = nbre\ de\ termes \times \left(\tfrac{1^{er}\ +\ dernier\ terme}{2}\right)$$

### 4.2 Suites géométriques:

#### 4.2.1 Définition :

$\exists\ q \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q \times u_n$ forme récurrente
$\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n = q^n \times u_0$ forme explicite

#### 4.2.2 Propriétés :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad \text{avec} \quad a \leq b \qquad \sum_{i=a}^{b} u_i = 1^{er}\ terme \times \left(\frac{1 - q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}\right)$$

### 4.3 Suites arithmético-géométrique:

#### 4.3.1 Définition :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a \times u_n + b$ (forme récurrente)

#### 4.3.2 Méthode d'étude :

Si $a = 1$, $(u_n)$ est une suite arithmétique

Si $a \neq 1$,

- $u_n = a^n u_0 + b\dfrac{(1-a^n)}{(1-a)}$
- on cherche $c$ tel que $c = ac + b$. La suite $v_n = u_n - c$ est alors une suite géométrique. On en déduit : $u_n = a^n(u_0 - c) + c$ (forme explicite)

## 5 / Etude des suites récurrentes de la forme $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$

### 5.1 Définition :

On appelle suite réelle récurrente linéaire d'ordre 2 toute suite $(u_n)$ définie par une relation de la forme : $u_{n+2} = a.u_{n+1} + b.u_n$ où $a$ et $b$ sont fixés dans $\mathbb{R}$ avec $u_0$ et $u_1$ donnés dans $\mathbb{R}$.

### 5.2 But :

Donner l'écriture explicite des termes de la suite $(u_n)$ sous la forme $u_n = f(n)$

### 5.3 Méthode :

5.3.1 Ecrire la relation sous la forme $u_{n+2} - a.u_{n+1} - b.u_n = 0$

5.3.2 Ecrire l'équation caractéristique $(E)$ : $r^2 - a.r - b = 0$

5.3.3 Si $(E)$ admet deux solutions réelles : $r_1$ et $r_2$ alors
il existe un couple unique $(\lambda, \mu)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

5.3.4 Si $(E)$ admet une seule solution réelle : $r_0$ alors
il existe un couple unique $(\lambda, \mu)$ de $\mathbb{R}^2$ tel que $u_n = r_0^n(\lambda + n\mu)$

5.3.5 Si $(E)$ admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1$ et $r_2$
alors, écrire $r_1$ et $r_2$ sous forme exponentielle complexe.
Soit $r$ le module de $r_1$ et $r_2$ . Soit $\theta$ l'argument le plus simple de $r_1$ ou $r_2$,
les termes de la suite $(u_n)$ s'écrivent de manière unique sous la forme :
$u_n = r^n[A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)]$ , $n \in \mathbb{N}$.

5.3.6 $\lambda$ et $\mu$ ou $A$ et $B$ sont ensuite déterminés de façon unique à partir de la donnée des termes initiaux.

**CHAPITRE : 5**

**APPLICATIONS**

## 1 Fonction :

Soient $E$ et $F$ deux ensembles;
$f$ est une fonction de $E$ dans $F$ si à chaque élément $x$ de $E$ , $f$ associe au plus un élément $y$ de $F$. (certains éléments de $E$ peuvent donc ne pas avoir d'image par $f$)

## 2 Application :

$f$ est une application de $E$ dans $F$ si $f$ associe à tout élément $x$ de $E$ un et un seul élément $y$ de $F$ ; $y$ est appelé image de $x$ ; $x$ est appelé antécédent de $y$.

## 3 Application injective :

Une application $f$ de $E$ dans $F$ est dite injective si et seulement si :
$\forall (x,x') \in E^2 \quad x \neq x'$ entraine $f(x) \neq f(x')$
ou encore : $\forall (x,x') \in E^2 \quad f(x) = f(x')$ entraine $x = x'$

## 4 Application surjective :

Une application $f$ de $E$ dans $F$ est dite surjective si et seulement si :
$\forall\ y \in F$ il existe **au moins** un élément $x$ de $E$ tels que $f(x) = y$
ou encore : $f(E) = F$.

## 5 Composition des applications :

Soit $f$ une application de $E$ dans $F$ et $g$ de $F$ dans $G$, on note $(g \circ f)(x) = g[f(x)]$
attention , généralement, $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$
par définition, on note $f^2 = f \circ f$ et $f^n = \underbrace{f \circ f \circ f \circ ..... \circ f}_{n\ facteurs}$
Attention : ne pas confondre $f^n(x)$ , $[f(x)]^n$ et $f^{(n)}(x)$

## 6 Propriétés :

6.1 la composée de deux injections est injective.

6.2 la composée de deux surjections est surjective.

6.3 Si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.

6.4 Si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.

## 7 Application bijective :

**7.1 Définition :** Une application $f$ de $E$ dans $F$ est dite bijective si et seulement si $f$ est injective et surjective.

### 7.2 Propriétés :

7.2.1 $f$ bijective de $E$ dans $F \iff \forall\ y\ \in F, \exists\ !\ x \in E\ /\ f(x) = y$

7.2.2 La composée de deux bijections est bijective.

7.2.3 Une application $f$ est bijective de $E$ dans $F$ équivaut à dire qu'il existe une unique application réciproque, notée $f^{-1}$, de $F$ dans $E$, telle que : $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

7.2.4 $f$ bijective de $E$ dans $F \iff f^{-1}$ bijective de $F$ vers $E$.

7.2.5 Si une application $f$ est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ alors les graphes de $f$ et de $f^{-1}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

7.2.6 Si $f$ et $g$ sont bijectives alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

## 8 Image d'un ensemble :

Soit $f$ une application de $E$ dans $F$; soit $A$ une partie de $E$ . On apelle image de $A$ par $f$ l'ensemble $f(A)$ défini par : $f(A) = \{y \in F\ \ /\ \exists\ x \in A \text{ avec } f(x) = y\}$.

### 8.1 Propriétés :

Soit $f$ une application de $E$ dans $F$; soient $A_1$ et $A_2$ deux parties de $E$.

8.1.1 $A_1 \subset A_2 \Longrightarrow f(A_1) \subset f(A_2)$

8.1.2 $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$

8.1.3 $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$

## 9 Stabilité, invariance :

Soit $f$ une application de $E$ dans $F$; une partie $A$ de $E$ est dite partie stable dans $E$ pour $f$ si $f(A) \subset A$. Cette partie $A$ est dite invariante si $f(A) = A$.

## 10 Restriction d'une application :

Soit $f$ une application de $E$ dans $F$; soit $A$ une partie de $E$.
On appelle restriction de $f$ à $A$, l'application de $A$ dans $F$, notée $f_{/A}$ et définie par : $\forall x \in A,\ f_{/A}\ (x) = f(x)$.

## 11 Prolongement d'une application :

Soit $A$ une partie de $E$ et soit $f$ une application de $A$ dans $F$.
On appelle prolongement de $f$ à $E$ toute application $g$, de $E$ dans $F$, telle que : $\forall\ x \in A,\ g(x) = f(x)$. ( Il en existe donc une infinité ).

## 12 Théorème des tiroirs :

Une application d'un ensemble à $n$ éléments vers un ensemble à $p$ éléments, avec $n > p$ n'est pas injective.

**CHAPITRE : 6**

**DENOMBREMENT**

## 1 / Ensembles finis :

1.1 Définition :
Un ensemble $E$ est dit fini s'il est vide ou s'il existe un entier $n$ et une bijection de $[[1;n]]$ vers $E$ . L'entier $n$ est appelé cardinal de $E$.
Notation : $Card(E) = n$.
Convention : Si $E = \emptyset$ alors $Card(E) = 0$
Vocabulaire : Dénombrer un ensemble, c'est déterminer son cardinal, c'est à dire évaluer le nombre de ses éléments .

1.2 Propriétés:

1.2.1 Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Il existe une bijection entre $E$ et $F$ si et seulement si $card(E) = card(F)$.

1.2.2 Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis. Si $F \subset E$ alors $card(F) \leq card(E)$.

1.2.3 Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis . Si $F \subset E$ et $card(E) = card(F)$ alors $E = F$ et réciproquement.

1.2.4 Soient $E$ et $F$ deux ensembles finis de même cardinal et soit $f$ une application de $E$ dans $F$ alors : $f$ injective $\Longleftrightarrow$ $f$ surjective $\Longleftrightarrow$ $f$ bijective

1.3 Propriétés:
Soient $A$ et $B$ deux parties d'un ensemble fini $E$ ;

1.3.1 Si $A$ et $B$ sont disjoints alors $card(A \cup B) = card(A) + card(B)$

1.3.2 $card(A \setminus B) = card(A) - card(A \cap B)$

1.3.3 $card(\overline{A}) = card(E) - card(A)$

1.3.4 $card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

1.4 Corollaire :
Si $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un système complet d'un ensemble $E$ fini, alors
$card(E) = \sum_{i=1}^{n} card(A_i)$

1.5 Théorème :
Si $E$ et $F$ sont deux ensembles finis alors $card(E \times F) = card(E) \times card(F)$

1.6 Théorème :
Si $E$ est un ensemble fini alors $card(E^n) = (card(E))^n$

## 2 / p-listes d'un ensemble :

### 2.1 Définition :

On désigne par $p-liste$ (ou $p-uplet$) d'un ensemble $E$ fini, toute suite de $p$ éléments de $E$.

· Deux $p-listes$ comportant les mêmes éléments en ordre différents sont distinctes.
· Une $p-listes$ **peut** contenir plusieurs fois le même élément de $E$.

### 2.2 Théorème :

Dans un ensemble contenant $n$ éléments, le nombre de $p-listes$ distinctes est $n^p$.

### 2.3 Domaine d'application :

Prélèvements successifs avec remise.

### 2.4 Théorème :

Si $card(E) = n$ alors $card(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

## 3 / p-listes sans répétition (ou arrangements) :

### 3.1 Définition :

Dans un ensemble $E$ fini, toute suite de $p$ éléments **distincts** est appelée : p-liste sans répétition de $p$ éléments de $E$.

· Deux p-liste sans répétition comportant les mêmes éléments en ordre différents sont distinctes.
· Une p-liste sans répétition **ne peut pas** contenir plusieurs fois le même élément.

### 3.2 Théorème :

Dans un ensemble contenant $n$ éléments, le nombre p-liste sans répétition est : $\dfrac{n!}{(n-p)!} = n.(n-1).(n-2)......(n-p+1) \quad \text{pour} \quad (1 \leq p \leq n)$

(Ancienne notation : $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$)

### 3.3 Domaine d'application :

Prélèvements successifs sans remise .

### 3.4 Définition :

Si $card(E) = n$, on appelle **permutation** : toute p-liste sans répétition des $n$ éléments de $E$.
Le nombre de permutations de $n$ éléments est $n!$

### 3.5 Théorème :

Il existe $n!$ bijections d'un ensemble à $n$ éléments vers un ensemble à $n$ éléments .

.

## 4 / p-combinaisons :

### 4.1 Définition :

Dans un ensemble $E$ fini, toute famille non ordonnée de $p$ éléments distincts est appelée p-combinaison. (On parle également de poignée).

· Dans une p-combinaison, l'ordre **n'importe pas**.

· Une p-combinaison **ne peut pas** contenir plusieurs fois le même élément.

### 4.2 Théorème :

Dans un ensemble contenant $n$ éléments, le nombre de p-combinaisons est : $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ $\quad (0 \leq p \leq n)$ $\quad$ (Ancienne notation : $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$)

### 4.3 Domaine d'application :

Prélèvements par poignées .

### 4.4 Formules :

4.4.1 $\quad \forall\ n \in \mathbb{N}$ et $\forall\ p \in [[0, n]]$

4.4.1.1 $\quad \binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $\qquad$ 4.4.1.2 $\quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

4.4.2 $\quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\ p \in [[1, n]]$

4.4.2.1 $\quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$ $\qquad$ 4.4.2.2 $\quad p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

4.4.3 $\quad$ convention : $\binom{x}{y} = 0$ si $x < y$

4.4.4 $\quad \forall\ n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall\ p \in [[1, n-1]]$ $\quad$ Formule du triangle de Pascal :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

4.4.5 $\quad \forall (a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $\forall\ n \in \mathbb{N}$ $\quad$ Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

.

## 5 / Récapitulatifs :

| **Méthode de prélèvements des $p$ éléments parmi $n$** | **Conditions** | **Nombre de tirages** |
|---|---|---|
| Prélèvements avec remise éléments distincts ou non, éléments ordonnés : **P-LISTE** | $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ | Nombre de $p-listes$ de $p$ éléments choisis parmis $n$ : $\mathbf{n^p}$ |
| Prélèvements sans remise éléments distincts, éléments ordonnés : **P-LISTE sans répétition** | $0 \leq p \leq n$ | Nombre $p-listes\ sans\ répétition$ de $p$ éléments choisis parmi $n$ : $\frac{n!}{(n-p)!} = (n-1).(n-2)......(n-p+1)$ |
| cas particulier d'arrangements **PERMUTATIONS** | $p = n$ | Nombre de *permutations* de $n$ éléments : $\mathbf{n!}$ |
| Prélèvements par poignées éléments distincts, éléments non ordonnés : **P-COMBINAISONS** | $0 \leq p \leq n$ | Nombre de $p-combinaisons$ de $p$ éléments choisis parmi $n$ : $\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{p!(n-p)!}}$ |

**CHAPITRE : 7**

**FONCTIONS REELLES USUELLES ,**

# 1 / Définitions

## 1.1 Fonction réelle de variable réelle:

On appelle fonction réelle ou numérique de variable réelle toute application dont l'ensemble de départ et celui d'arrivée sont des sous ensembles de $\mathbb{R}$.

## 1.2 Domaine de définition:

noté $D_f$, c'est l'ensemble des réels $x$ pour les quels $f(x)$ existe.

## 1.3 Représentation graphique d'une fonction:

Dans le plan $P$ muni d'un repère cartésien , on appelle représentation graphique de $f$ , la partie du plan définie par : $C_f = \{M \in P / \ M(x, f(x)),\ x \in D_f\}$

## 1.4 Définition:

On appelle fonction polynôme toute fonction de la forme $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k.x^k$,
$\forall\ n \in \mathbb{N}$ , les coefficients $a_k$ étant réels.

## 1.5 Définition:

On appelle fonction rationnelle, le quotient de deux fonctions polynômes.

# 2 / Opérations, rappels

Soient $f$ et $g$ deux fonctions numériques .: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x) \qquad (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad et \qquad f \circ g(x) = f[g(x)]$$

# 3 / Périodicité

## 3.1 Définition

Soit $f$ une fonction et soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$. La fonction $f$ est dite périodique de période $T$ sur $I$ si et seulement si :

1 / $\forall\ x \in I \Longrightarrow x + T \in I$

2 / $\forall\ x \in I,\ f(x+T) = f(x)$

## 3.2 Propriétés

Si la fonction $f$ admet pour périodique $T$ sur l'intervalle $I$ alors le graphe de cette fonction est invariant par translation de vecteur $\overrightarrow{v}(T;0)$

## 4 / Symétries

4.1 Définition : parité

Soit $f$ une fonction et soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$. La fonction $f$ est dite paire sur $I$ (respectivement impaire) si et seulement si :

1 / $\forall x \in I \Longrightarrow -x \in I$

2 / $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$ (respectivement $f(-x) = -f(x)$ )

4.2 Propriétés :

Si $f$ est une fonction paire alors le graphe de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe $(0y)$ .

Si $f$ est une fonction impaire alors le graphe de cette fonction est symétrique par rapport à l'origine du repère.

4.3 Théorème : Axe de symétrie vertical

La droite d'équation $x = a$ est axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée:

1 / $\forall x \in D_f \quad f(a - x) = f(a + x)$

2 / $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x)$

4.4 Théorème : Centre de symétrie

Le point $A(a, b)$ est centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ si et seulement si l'une des deux propriétés suivantes est vérifiée:

1 / $\forall x \in D_f \quad f(a - x) = 2b - f(a + x)$

2 / $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$

## 5 / Extrémums

5.1 Définition :

Soit $f$ une fonction et soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$. On dit que $f$ admet un maximum $M$ sur $I$ si et seulement si $\forall x \in I,\ f(x) \leq M$ On note $M = \max\limits_{x \in I} (f(x))$ .

( définition analogue pour un minimum $m = \min\limits_{x \in I}(f(x))$ )

5.2 Définition :

Si $\max\limits_{x \in I} (f(x))$ existe et $\max\limits_{x \in I} (f(x)) = f(x_0)$ alors on dit que $f$ atteint son maximum $M$ au point d'abcsisse $x_0$. (définition analogue pour un minimum)

5.3 Définition :

Soit $f$ une fonction et soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$. On dit que $f$ est bornée sur $I$ si et seulement si $\exists\ A \in \mathbb{R}^{+*}\ /\ \forall\ x \in I,\ \mid f(x) \mid \leq A$

## 6 / Variations

6.1 Définition

Soit $f$ une fonction et soit $I$ un intervalle inclus dans $D_f$.

$f$ est croissante sur $I \Longleftrightarrow \forall\ (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

$f$ est décroissante sur $I \Longleftrightarrow \forall\ (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

$f$ est dite strict. croissante sur $I \Longleftrightarrow \forall\ (x_1, x_2) \in I^2,\ x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

(définition analogue pour strictement décroissante)

$f$ est dite monotone sur $I$ si et seulement si $f$ est uniquement croissante ou uniquement décroissante sur $I$.

Attention: $f$ non croissante n'entraine pas $f$ décroissante

## 7 / Logarithme népérien

John Napier ou Neper anglais 1550-1617 de logos=rapport et de arithmos= nombre

### 7.1 Définitions

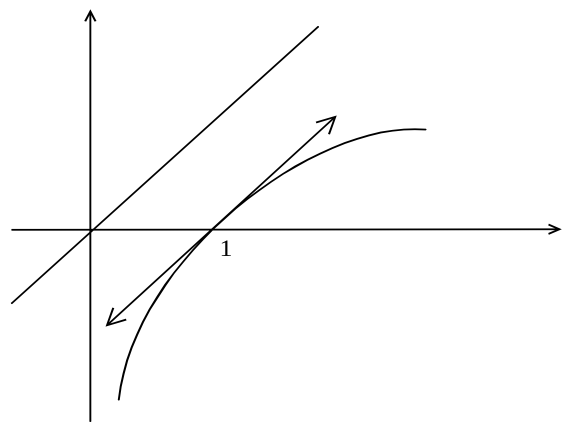
Soit $f$ la fonction définie de $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. On appelle **fonction logarithme néperien**, l'unique primitive de la fonction $f$ qui s'annule pour $x = 1$. On la note $\ln(x)$

### 7.2 Dérivation

La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$ et de plus $[\ln(u(x))]' = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$

### 7.3 Graphe

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| ln | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |




$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \begin{cases} \ln(x) < 0 \iff x < 1 \\ \ln(x) = 0 \iff x = 1 \\ \ln(x) > 0 \iff x > 1 \end{cases}$$

### 7.4 Règles de calcul

7.4.1 $\forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ , $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

7.4.2 $\forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(\dfrac{1}{x}) = -\ln(x)$

7.4.3 $\forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$ , $\ln(\dfrac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$

7.4.4 $\forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall\ x \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(x^n) = n \times \ln(x)$

### 7.5 Quelques limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0\ ;\ \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0\ ;\ \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1\ ;\ \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1\ ;\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$$

## 8 / Fonction logarithme décimal

### 8.1 Définition :

On appelle fonction logarithme décimal $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

### 8.2 Propriétés :

$\log(1) = 0$ $\log(10) = 1$ $\log(100) = 2$ $\log(10^n) = n$

## 9 / Fonction exponentielle

### 9.1 Définition

On définit la fonction exponentielle de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$ commme étant la réciproque de la fonction $\ln$. Elle est notée $e^x$ ou $\exp(x)$

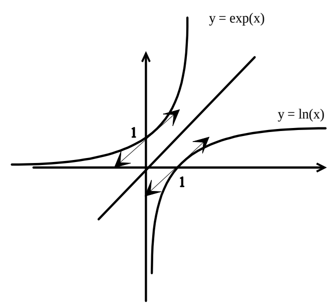
### 9.2 Propriété :

Les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$.

### 9.3 Dérivation

$\exp(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp'(x) = \exp(x)$
de plus $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

### 9.4 Graphe




| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| exp | $0^+$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \exp(x) < 1 \iff x < 0 \\ \exp(x) = 1 \iff x = 0 \\ \exp(x) > 1 \iff x > 0 \end{cases}$$

### 9.5 Règles de calcul

9.5.1 $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$

9.5.2 $\forall\ x \in \mathbb{R} \quad \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

9.5.3 $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

### 9.6 Quelques limites

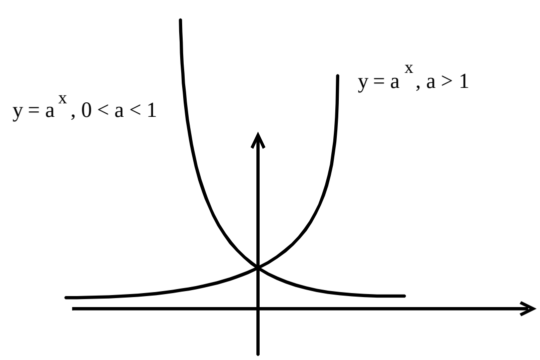
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to -\infty} xe^x = 0^-$$

## 10 / Exponentielle de base a

Pour tout $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose $a^x = \exp_a(x) = \exp(x \ln(a))$

La fonction $\exp_a$ est appelée fonction exponentielle de base $a$ .

La fonction $\exp_{10}$ est appelée fonction exponentielle décimale , elle est souvent notée :x$\to 10^x$



# 11 / Fonctions puissances

## 11.1 Fonctions puissances entières :

$$f(x) = x^n = \underbrace{x \times x \times x .... \times x}_{n \quad fois} \qquad n \in \mathbb{N} \text{ et } D_f = \mathbb{R}$$

## 11.2 Fonctions racines :

$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

**attention** : si $n$ est pair alors $D_f = \mathbb{R}^+$ et si $n$ est impair alors $D_f = \mathbb{R}$.

## 11.3 Fonctions puissances entières négatives :

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad n \in \mathbb{N} \text{ et } D_f = \mathbb{R}^*$$

## 11.4 Fonctions puissances d'exposant rationnel $\frac{p}{q}$ :

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (x^p)^{\frac{1}{q}} = (x^{\frac{1}{q}})^p$$

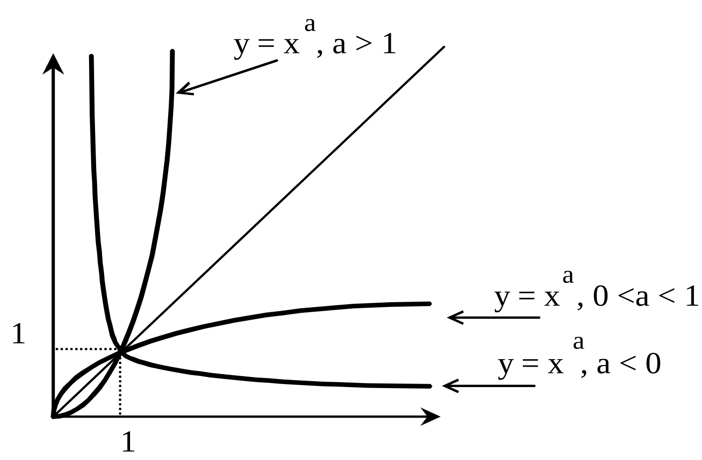
**attention** : $D_f$ dépend des parités de $p$ et de $q$. $\qquad p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

## 11.5 Fonctions puissances d'exposant réel mais non rationnel :

### 11.5.1 Définition :

Pour $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad f(x) = x^a = \exp(a \ln(x)) \qquad D_f = \mathbb{R}^{*+}$

### 11.5.2 Graphe




### 11.5.3 Règles de calcul

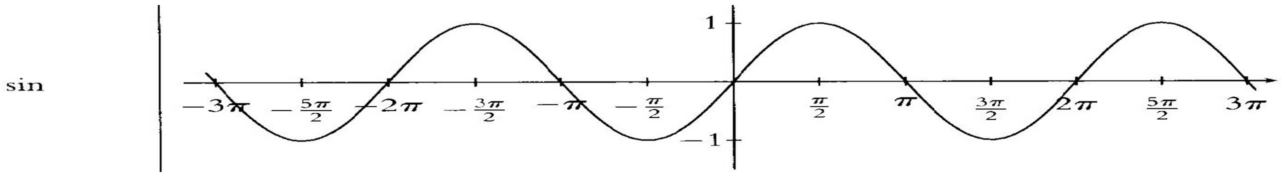
$\forall\ (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall\ x \in\ \mathbb{R}^{*+},\ \forall\ y \in \mathbb{R}^{*+}$ :

$$(xy)^a = x^a y^a \qquad x^{a+b} = x^a x^b \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b} \qquad (x^a)^b = x^{ab}$$

## 12 / Fonctions circulaires

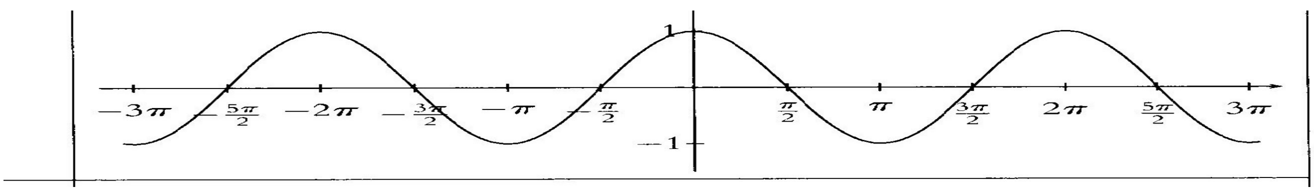
### 12.1 Définition et propriétés de la fonction sinus :

La fonction sinus est définie de $\mathbb{R}$ vers $[-1;1]$ .
Elle admet $2\pi$ pour période.
Elle est impaire.
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \sin'(x) = \cos(x)$



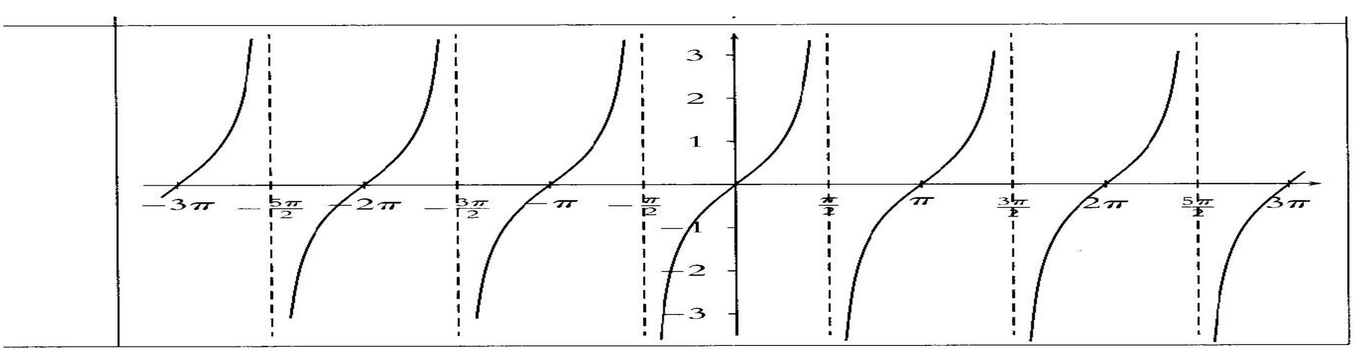

### 12.2 Définition et propriétés de la fonction cosinus :

La fonction cosinus est définie de $\mathbb{R}$ vers $[-1;1]$ .
Elle admet $2\pi$ pour période.
Elle est paire.
$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad \cos'(x) = -\sin(x)$




### 12.3 Définition et propriétés de la fonction tangente :

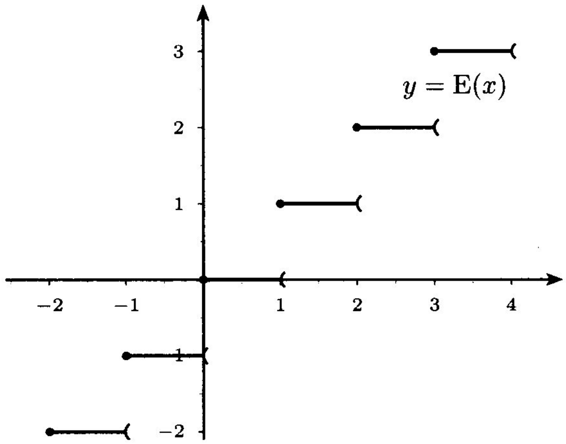
La fonction tangente est définie de $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ vers $\mathbb{R}$
Elle admet $\pi$ pour période.
Elle est impaire.
$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = 1$
$\forall\ x \in \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[,\quad \tan'(x) = 1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$



.

## 12.4 Définition et propriétés de la fonction partie entière :

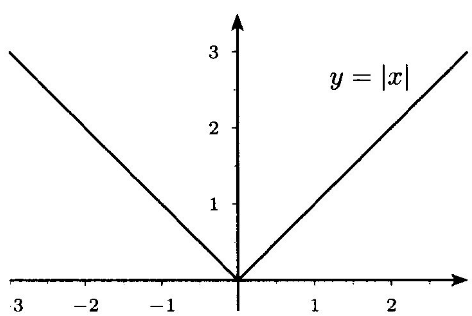
Pour tout nombre réel $x$, on appelle partie entière de $x$, notée $\lfloor x \rfloor$, le nombre entier $n$ tel que $n \leq x < n+1$.




## 12.5 Définition et propriétés de la fonction valeur absolue :

Pour tout nombre réel $x$, on appelle valeur absolue de $x$, notée $|x|$, le nombre réel défini par :

$$|x| = x \text{ si } x > 0$$
$$|x| = -x \text{ si } x < 0$$
$$|0| = 0$$



**CHAPITRE : 8**

**DERIVEES ET PRIMITIVES USUELLES**

## 1 / Dérivée d'une fonction d'une variable réelle

1.1 Opérations sur les dérivées :

| $f$ | $\lambda = cte$ | $u + v$ | $u \times v$ | $\lambda u$ | $\dfrac{1}{u(x)}$ | $\dfrac{u}{v}$ | $f[u(x)]$ | $f^{-1}(x)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $0$ | $u' + v'$ | $u'v + uv'$ | $\lambda u'$ | $-\dfrac{u'(x)}{[u(x)]^2}$ | $\dfrac{vu' - uv'}{v^2}$ | $u'(x) \times f'[u(x)]$ | $\dfrac{1}{f'[f^{-1}(x)]}$ |

1.2 Dérivées usuelles :

| $f$ | $f'$ |
|---|---|
| $f(x) = x^n$ ,$n \in \mathbb{Z}^*$ $\begin{cases} n > 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ n < 0 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}^* \end{cases}$ | $f'(x) = nx^{n-1}$ $\begin{cases} n \geq 1 \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R} \\ n < 1 \Rightarrow D_{f'} = \mathbb{R}^* \end{cases}$ |
| $f(x) = \sin(x)$ $D_f = \mathbb{R}$ | $f'(x) = \cos(x)$ $D_{f'} = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \cos(x)$ $D_f = \mathbb{R}$ | $f'(x) = -\sin(x)$ $D_{f'} = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \tan(x)$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ | $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ $D_{f'} = \mathbb{R} \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ |
| $f(x) = \ln(x)$ $D_f = \mathbb{R}_+^*$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$ |
| $f(x) = \exp(x)$ $D_f = \mathbb{R}$ | $f'(x) = \exp(x)$ $D_{f'} = \mathbb{R}$ |
| $f(x) = \|x\|$ , $D_f = \mathbb{R}$ | $f'(x) = sgn(x)$ $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \ln\|x\|$ , $D_f = \mathbb{R}^*$ | $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ , $D_{f'} = \mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = x^r$ , $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $D_f = \mathbb{R}_+^*$ | $f'(x) = rx^{r-1}$ , $r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$ |
| $f(x) = \sqrt{x}$ , $D_f = \mathbb{R}_+$ | $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $D_{f'} = \mathbb{R}_+^*$ |
| $f(x) = a^x$ , $a \in \mathbb{R}_+^*$ , $D_f = \mathbb{R}$ | $f'(x) = (\ln a)a^x$ , $D_{f'} = \mathbb{R}$ |

.

## 2 / Dérivée d'une fonction de deux variables réelles

2.1 Définition :

On appelle **fonction des deux variables réelles** $(x, y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ toute fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \to f(x,y) \end{cases}$

2.2 Définition :

On appelle **dérivée partielle** de $f$ par rapport à la variable $x$ la fonction notée :
$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ ou $f'_x(x,y)$ obtenue en dérivant $f$ par rapport à la variable $x$. ($y$ étant constant)
De même $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ou $f'_y\ (x,y)$ est obtenue en dérivant $f$ par rapport à la variable $y$ ($x$ étant alors constant ).

## 3 / Primitives usuelles

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $a$ | $x^\alpha$ <br> $\alpha \neq -1$ | $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ <br> $x>0$ | $\dfrac{1}{x^2}$ <br> $x \neq 0$ | $\dfrac{1}{x}$ <br> $x \neq 0$ | $e^x$ | $a^x$ <br> $a>0,\ a\neq 1$ | $\ln x$ <br> $x>0$ |
| $F(x)$ | $ax$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ | $2\sqrt{x}$ | $-\dfrac{1}{x}$ | $\ln\lvert x\rvert$ | $e^x$ | $\dfrac{a^x}{\ln a}$ | $x \ln x - x$ |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $\sin(ax+b)$ | $\cos(ax+b)$ | $1+\tan^2 x$ | $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ | $\dfrac{1}{1+x^2}$ |
| $F(x)$ | $-\dfrac{\cos(ax+b)}{a}$ | $\dfrac{\sin(ax+b)}{a}$ | $\tan x$ | $\arcsin x$ | $\arccos x$ | $\arctan x$ |

.

## 4 / Primitives de fonctions composées

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $u'.e^u$ | $u'.u^n$ | $\dfrac{u'}{u}$ | $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ | $u'.\sin u$ | $u'.\cos u$ |
| $F(x)$ | $e^u$ | $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ | $\ln\|u\|$ | $2\sqrt{u}$ | $-\cos u$ | $\sin u$ |

## 5 / Intégration par partie

Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $C^1$ sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$

$$\forall\ (a,b) \in I^2 \qquad \int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$$

**CHAPITRE : 9**

**EQUATIONS DIFFERENTIELLES**

**A COEFFICIENTS CONSTANTS**

## 1 / Equations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants

### 1.1 Définition :

On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants réels, toute équation pouvant se ramener à la forme :
$(E) \quad : \quad y' + a.y = b \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$

### 1.2 Théorème :

Si $a$ est non nul alors les solutions de l'équation $(E)$ sont de la forme $y(x) = Ce^{-a.x} + \dfrac{b}{a}$ où $C$ est une constante quelconque réelle.

## 2 / Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

### 2.1 Définitions :

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et à second membre, toute égalité pouvant se ramener à la forme :

$$(E) \quad : \quad y'' + a.y' + b.y = c \qquad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

Résoudre l'équation $(E)$, c'est déterminer toutes les fonctions $y$, deux fois dérivables sur un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et vérifiant l'équation $(E)$

Etant donné une équation $(E)$ : $y'' + a.y' + b.y = c$ , l'équation : $(E_0)$ : $y'' + a.y' + b.y = 0$ est appelée équation sans second membre (ESSM), ou équation homogène, associée à l'équation $(E)$. L'équation $(E)$ est alors appelée équation avec second membre (EASM).

### 2.2 Résolution de l'ESSM

#### 2.2.1 Théorème :

Pour tous $\lambda$ et $\mu$ réels , si $y_0(x)$ et $z_0(x)$ sont deux solutions de $(E_0)$
alors $\lambda y_0(x) + \mu\, z_0(x)$ est également une solution de $(E_0)$ .
L'ensemble des solutions d'une même équation homogène, muni des lois + et $\cdot$ est stable par combinaison linéaire.

.

2.2.2 Théorème : détermination de $y_0(x)$

Soit $r^2 + ar + b = 0$, l'équation caractéristique (ou polynôme caractéristique) associé à l'équation $(E_0)$ et soit $\Delta$ le discriminant de $r^2 + ar + b = 0$.

2.2.2.1 Si $\Delta > 0$ :

L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{R}$ deux solutions distinctes :
$r_1$ et $r_2$ $\quad (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$
Les solutions de $(E_0)$ sont de la forme $y_0(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}$ ,
$\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ou $\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, selon que l'on souhaite des solutions réelles ou complexes.

2.2.2.2 Si $\Delta = 0$ :

L'équation caractéristique admet dans $\mathbb{R}$ une solution double $r$.
Les solutions de $(E_0)$ sont de la forme : $y_0(x) = (\lambda_1 + \lambda_2 x)e^{rx}$
$\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ou $\forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$, selon que l'on souhaite des solutions réelles ou complexes.

2.2.2.3 Si $\Delta < 0$ :

L'équation caractéristique n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais admet deux solutions distinctes complexes conjuguées : $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$.
Les solutions de $(E_0)$ sont de la forme $y_0(x) = \lambda_1 e^{r_1 x} + \lambda_2 e^{r_2 x}, \forall\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$

Cependant il est préférable de présenter les solutions de $(E_0)$ sous la forme :
$y_0(x) = (\ A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\ )e^{\alpha x} \quad (A, B) \in \mathbb{C}^2$

Pour un emploi en physique, on écrira les solutions de $(E_0)$ sous la forme :
$y_0(x) = R\cos(\ \beta x - \varphi\ )\ e^{\alpha x}$, avec $R = \sqrt{A^2 + B^2}$ puis par identification : $\cos(\varphi) = \dfrac{A}{R}$ et $\sin(\varphi) = \dfrac{B}{R}$

2.3 résolution de l'EASM

2.3.1 Théorème :
Soit $(E)$ : $y'' + a.y' + b.y = c$ .
Soit $y_0(x)$ une solution générale de l'ESSM $(E_0)$
Soit $y_1(x)$ une solution particulière de l'EASM $(E)$.
Les solutions de $(E)$ sont de la forme : $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$ .

**CHAPITRE : 10**

**SYSTEMES D'EQUATIONS LINEAIRES**

## 1 / Généralités :

1.1 Définition :

Soient $(a_1, a_2, ...., a_p) \in \mathbb{K}^p$ et $b \in \mathbb{K}$.
On appelle **équation linéaire à $p$ inconnues** toute équation de la forme :
$a_1.x_1 + a_2.x_2 + .... + a_j.x_j + .... + a_p.x_p = b$.
Les inconnues étant $x_1, x_2, ...., x_p$.

1.2 Définition :

Lorsque l'on est en présence de $n$ équations de la forme précédente, il s'agit d'un **système linéaire de $n$ équations à $p$ inconnues.**

$$(S) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + .... + a_{1j}.x_j + .... + a_{1p}.x_p = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + .... + a_{2j}.x_j + .... + a_{2p}.x_p = b_2 \\ .......... \\ a_{i1}.x_1 + a_{i2}.x_2 + .... + a_{ij}.x_j + .... + a_{ip}.x_p = b_i \\ ......... \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + .... + a_{nj}.x_j + .... + a_{np}.x_p = b_n \end{array} \right.$$

Les $a_{ij}$ et les $b_i$ étants des scalaires connus, les $x_i$ étant inconnus.

1.3 Définitions :

1.3.1 Un système est dit **homogène** si et seulement si : $\forall \ i \in \ [[1;n]]$ , $b_i = 0$ .

1.3.2 Un système est dit **impossible** s'il n'admet aucune solution .

1.3.3 Un système est dit **indéterminé** s'il admet plusieurs solutions. On exprime alors toutes les inconnues en fonction de certaines d'entre elles.

1.3.4 Un système de $n$ équations à $n$ inconnues peut admettre pour solution une **unique famille** $(x_1, x_2, ....., x_n)$.

1.3.5 Deux systèmes sont dits **équivalents** s'ils admettent le même ensemble de solutions.

1.4 Propriété :

Si l'on permute deux lignes, ou si l'on remplace une ligne par une combinaison linéaire d'autres lignes, alors le nouveau système $(S')$, obtenu à partir du système $(S)$ est équivalent au système $(S)$.
**Attention** : aucune des lignes ne doit " disparaître "

## 2 / Résolution à l'aide de la méthode du "pivot de Gauss" :

2.1 Obtention d' un système triangulaire de $n$ équations à $p$ inconnues :

On représente le système $(S)$ initial sous la forme suivante :

$$(S) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1p} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2p} & : & b_2 \\ ..... & ..... & ..... & ..... & : & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{np} & : & b_n \end{array} \right.$$

Il faut transformer le système $(S)$ afin d'obtenir un système $(S')$ **triangulaire**

$$(S') \quad : \quad \left\{ \begin{array}{l} r \left\{ \begin{array}{cccccccccc} \overbrace{1 \quad \alpha_{1,2} \quad ..... \quad \alpha_{1,r}}^{r} & \alpha_{1,r+1} & \alpha_{1,r+2} & ..... & \alpha_{1p} & : & \beta_1 \\ 0 \quad 1 \quad ..... \quad \alpha_{2,r} & \alpha_{2,r+1} & \alpha_{2,r+2} & ..... & \alpha_{2p} & : & \beta_2 \\ ... \quad ... \quad ..... \quad ... & ..... & ..... & ..... & ..... & : & .... \\ 0 \quad 0 \quad ..... \quad 1 & \alpha_{r,r+1} & \alpha_{r,r+2} & ..... & \alpha_{r,p} & : & \beta_r \end{array} \right. \\ \\ \quad \begin{array}{cccccccccc} 0 \quad 0 \quad ..... \quad 0 & 0 & 0 & ..... & 0 & : & \beta_{r+1} \\ ... \quad ... \quad ..... \quad ... & ..... & ..... & ..... & ..... & : & ..... \\ 0 \quad 0 \quad ..... \quad 0 & 0 & 0 & ..... & 0 & : & \beta_n \end{array} \end{array} \right.$$

Le nombre $r$ est appelé **rang du système** $(S)$ remarque : $0 \leq r \leq n$

2.3 Discussion du système :

2.3.1 Si $r = p$ alors

2.3.1.1 Si $p = n$ alors le système admet une unique solution : $(x_1, x_2, ..., x_p)$

2.3.1.2 Si $p < n$ alors

2.3.1.2.1 Si $\forall \ i \geq r+1$ , $\beta_i = 0$, alors le système admet une unique solution : $(x_1, x_2, ..., x_p)$

2.3.1.2.2 Si $\exists \ i \geq r+1 \ / \ \beta_i \neq 0$, alors le système est impossible.

2.3.2 Si $r < p$ alors

2.3.2.1 Si $r = n$ alors le système est indéterminé.

2.3.2.2 Si $\exists \ i \geq r+1 \ / \ \beta_i \neq 0$, alors le système est impossible.

2.3.2.3 Si $\forall \ i \geq r+1$ , $\beta_i = 0$, alors le système est indéterminé.

**CHAPITRE : 11**

**MATRICES**

# 1 / Matrices :

1.1 Définitions : Matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes

Soient $n$ et $p$ deux entiers non nuls, on appelle matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes

d'éléments de $\mathbb{K}$ tout tableau $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1j} & ..... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2j} & ..... & a_{2p} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & a_{i2} & ..... & a_{ij} & ..... & a_{ip} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nj} & ..... & a_{np} \end{pmatrix}$

La matrice $A$ est aussi notée $(a_{ij})$
$i$ est l'indice de ligne $1 \leq i \leq n$ et $j$ est appelé indice de colonne $1 \leq j \leq p$

1.2 Définition

L'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

1.3 Définitions : Matrices à une dimension .

Si $n = 1$ alors la matrice est appelée "**matrice ligne**" .
Si $p = 1$ alors la matrice est appelée "**matrice colonne**" .

1.4 Définitions : Matrices carrées
Dans les définitions ci-dessous : $i \in [[1;n]]$ et $j \in [[1;p]]$

Si $n = p$ alors la matrice est dite matrice carrée d'ordre $n$ et les éléments $a_{ii}$ sont appelés **éléments diagonaux**.
Si $\forall\ i$ et $\forall\ j$ $a_{ij} = 0$ alors la matrice est dite "**matrice nulle**", elle est notée : $O_n$.
Si $\forall\ i \neq j$ $a_{ij} = 0$ alors la matrice est dite "**matrice diagonale**".
Si $\forall\ i \neq j$ $a_{ij} = 0$ et $\forall\ i,\ a_{ii} = 1$ alors la matrice est dite "**matrice identité d'ordre** $n$" elle est notée : $I_n$.
Si $\forall\ i > j$ $a_{ij} = 0$ alors la matrice est dite "**matrice triangulaire supérieure**".
Si $\forall\ i < j$ $a_{ij} = 0$ alors la matrice est dite "**matrice triangulaire inférieure**".

| matrice diagonale | mat. triang. supérieure | mat. triang. inférieure |
|---|---|---|
| $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1i} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{2i} & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{ii} & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{ii} & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{ni} & a_{nn} \end{pmatrix}$ |

.

## 2 / Somme et multiplication externe :

### 2.1 Somme :

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice notée $A + B$ est appelée somme des matrices $A$ et $B$. Son terme général est $(a_{ij} + b_{ij})$.

### 2.2 Produit par un scalaire :

Soient $\lambda$ un élément de $\mathbb{K}$ et $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la matrice notée $\lambda.A$ est appelée matrice produit du scalaire $\lambda$ par la matrice $A$. Son terme général est $(\lambda a_{ij})$.

## 3 / Produit matriciel :

### 3.1 Produit d'une matrice ligne $(n)$ par une matrice colonne $(n)$:

Le produit n'est réalisable que si les matrices ont le même nombre d'éléments.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & .... & a_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ .... \\ b_n \end{pmatrix} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + ....... + a_n.b_n$$

### 3.2 Produit d'une matrice $(n, p)$ par une matrice colonne $(p)$:

Le produit n'est réalisable que si le nombre de colonnes de la matrice $A$ et le nombre de lignes de la matrice $B$ sont semblables. On obtient une matrice $n$ lignes et une colonne.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & ..... & a_{1j} & ..... & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & ..... & a_{2j} & ..... & a_{2p} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & a_{i2} & ..... & ..... & a_{ij} & ..... & a_{ip} \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & ..... & a_{nj} & ..... & a_{np} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ..... \\ ..... \\ b_i \\ ..... \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}.b_1 + a_{12}.b_2 + ....... + a_{1p}.b_p \\ \sum_{j=1}^{p} a_{2j}.b_j \\ ..... \\ ..... \\ \sum_{j=1}^{p} a_{ij}.b_j \\ ..... \\ \sum_{j=1}^{p} a_{nj}.b_j \end{pmatrix}$$

.

## 3.3 Produit d'une matrice $(n,p)$ par une matrice $(p,r)$:

Le produit n'est réalisable que si le nombre de colonnes de la matrice $A$ et le nombre de lignes de la matrice $B$ sont semblables.

$$
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{\dots} & k & \phantom{\dots} & \phantom{a_{1p}} \\ & & \downarrow & & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{ip} \\ a_{n1} & \dots & ak & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \end{array}
\times
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phantom{b_{11}} & j & \phantom{b_{1r}} \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ k \\ \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{1j} & b_{1r} \\ b_{21} & .. & \dots \\ b_{k1} & b_{kj} & b_{kr} \\ \dots & .. & \dots \\ b_{p1} & b_{pj} & b_{pr} \end{pmatrix} \end{array}
=
\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \phantom{\sum_{k=1}^{p} a_{1k}.b_{k1}} & j & \phantom{\sum_{k=1}^{p} a_{1k}.b_{kr}} \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{p} a_{1k}.b_{k1} & ..... & \sum_{k=1}^{p} a_{1k}.b_{kr} \\ ..... & ..... & ..... \\ ..... & \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj} & ..... \\ \sum_{k=1}^{p} a_{nk}.b_{k1} & ..... & \sum_{k=1}^{p} a_{nk}.b_{kr} \end{pmatrix} \end{array}
$$

En résumé : si $A_{(n,p)} \times B_{(p,r)} = C_{(n,r)}$ alors $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}.b_{kj}$

avec $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ et $1 \leq k \leq p$

## 3.4 Définition : Puissance d'une matrice carrée $(n,n)$

Soit $A$ une matrice carrée, on pose $A^0 = I_n$ et $\forall m \in \mathbb{N}^*$ , $A^m = A^{m-1} \times A$
La matrice $A^m$ est appelée puissance $m^{ième}$ de $A$

## 3.5 Propriétés du produit matriciel :

### 3.5.1 Elément neutre : $A \times I_n = I_n \times A = A$

### 3.5.2 Associativité : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$

### 3.5.3 Distributivité : $A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C)$ et
$(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$

### 3.5.4 Attention, généralement : $A \times B \neq B \times A$
Si $A \times B = B \times A$ alors les matrices commutent.

### 3.5.5 Attention, généralement : $A \times B = 0$ n'entraine pas $A = 0$ ou $B = 0$

### 3.5.6 Attention, généralement : $A \times B = A \times C$ n'entraine pas $B = C$

### 3.5.7 Formule du **binôme**
Si $A$ et $B$ sont deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A \times B = B \times A$

alors $(A + B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k \times B^{m-k}$

.

3.5.8 Cas particulier des matrices carrées diagonales.

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & ..... & ..... & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & ..... & ..... \\ ..... & 0 & a_{i,i} & 0 & ..... \\ ..... & ..... & 0 & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & ..... & ..... & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & ..... & ..... & 0 \\ 0 & b_{2,2} & 0 & ..... & ..... \\ ..... & 0 & b_{i,i} & 0 & ..... \\ ..... & ..... & 0 & b_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & ..... & ..... & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } A \times B = \begin{pmatrix} a_{1,1}.b_{1,1} & 0 & ..... & ..... & 0 \\ 0 & a_{2,2}.b_{2,2} & 0 & ..... & ..... \\ ..... & 0 & a_{i,i}.b_{i,i} & 0 & ..... \\ ..... & ..... & 0 & a_{n-1,n-1}.b_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & ..... & ..... & 0 & a_{n,n}.b_{n,n} \end{pmatrix}$$

## 4 / Ecriture matricielle d'un système linéaire :

Considérons le système $(S)$ suivant de $n$ équations à $p$ inconnues :

$$(S) \quad : \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + .... + a_{1j}.x_j + .... + a_{1p}.x_p = b_1 \\ a_{21}.x_1 + a_{22}.x_2 + .... + a_{2j}.x_j + .... + a_{2p}.x_p = b_2 \\ .......... \\ a_{i1}.x_1 + a_{i2}.x_2 + .... + a_{ij}.x_j + .... + a_{ip}.x_p = b_i \\ ......... \\ a_{n1}.x_1 + a_{n2}.x_2 + .... + a_{nj}.x_j + .... + a_{np}.x_p = b_n \end{array} \right.$$

Les $a_{ij}$ et les $b_i$ étants des scalaires connus, les $x_i$ étant inconnus.
Soit $A$ la matrice de $n$ lignes et $p$ colonnes $(a_{ij})$ , canoniquement associée au système $(S)$.
Soit $B$ la matrice colonne de $n$ lignes $(b_i)$ .
Soit $X$ la matrice colonne de $n$ lignes $(x_i)$ .

Dans ces conditions le système $(S)$ précédent se résume à $A \times X = B$.

Le rang du système $(S)$ définit alors le rang de la matrice $A$ qui lui est associée.

.

## 5 / Matrice inversible :

### 5.1 Définition:

Soit $A$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
La matrice $A$ est dite inversible si et seulement si il existe une matrice notée $A^{-1}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^{-1} \times A = I_n$ ou $A \times A^{-1} = I_n$

### 5.2 Propriétés :

5.2.1 Si $A$ est une matrice carrée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :
$A^{-1}$ est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$

5.2.2 Si $A$ et $B$ sont deux matrices carrées inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $A \times B$ est inversible et $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$

5.2.3 Lorsque qu'une matrice est inversible, son inverse est unique.

5.2.4 $A$ est une matrice carrée inversible $\Longleftrightarrow AX = Y$ admet une unique solution.

### 5.3 Cas particulier des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ :

#### 5.3.1 Définition :

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors on appelle déterminant de la matrice $A$ le nombre :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \quad = \quad a.d - b.c$$

#### 5.3.2 Propriété :

Si $\det(A) \neq 0$ alors la matrice $A$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{a.d - b.c} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

#### 5.3.3 Application :

Soit le système $(S) = \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$ et la matrice associée $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Si $a.d - b.c \neq 0$ alors le système $(S)$ admet un unique couple de solution :

$$x = \frac{d.e - b.f}{a.d - b.c} \text{ et } y = \frac{a.f - c.e}{a.d - b.c}$$

## 6 / Détermination de l'inverse d'une matrice :

6.1 Méthode :
Soit $A$ une matrice carrée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soient $X$ et $Y$ deux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & ..... & a_{1j} & ..... & a_{1n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{i1} & ..... & a_{ij} & ..... & a_{in} \\ ..... & ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{n1} & ..... & a_{nj} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ..... \\ x_i \\ ..... \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ..... \\ y_i \\ ..... \\ y_n \end{pmatrix}$$

La résolution du système $A \times X = Y$ permet d'obtenir : $X = A^{-1} \times Y$ .
Les coefficients de la matrice $A^{-1}$ seront alors déterminés.

6.2 Propriétés :

6.2.1 Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

6.2.2 Une matrice diagonale est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls.

## 7 / Transposition :

7.1 Définition: transposée

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$
La matrice $A'$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par $a'_{ij} = a_{ji}$ est appelée matrice transposée de $A$ et est notée : $A' = {}^tA$

$$^t\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

7.2 Propriétés:

Soient $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
7.2.1 $^t(A + B) = {}^tA +^t B$
7.2.2 $^t(\lambda A) = \lambda.^tA$
7.2.3 $^t\ (^tA) = A$

7.3 Propriété:

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ $\quad {}^t(A \times B) = {}^tB \times^t A$

7.4 Propriété:

Si $A$ est une matrice carrée inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors :
$^tA$ est inversible et $(^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$

.

## 8 / Matrices symétriques, antisymétriques :

### 8.1 Définition:

Soit $A$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
La matrice $A$ est dite symétrique si et seulement si ${}^tA = A$
La matrice $A$ est dite antisymétrique si et seulement si ${}^tA = -A$

### 8.2 Propriétés:

Soit $A$ une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$
$A = (a_{ij})$ est symétrique $\iff$ $a_{ij} = a_{ji}$ pour tous $i$ et $j$
$A = (a_{ij})$ est antisymétrique $\iff$ $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tous $i$ et $j$

| matrice symétrique | matrice antisymétrique |
|---|---|
| $\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 4 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ |

### 8.3 Remarque : Les éléments de la diagonale d'une matrice antisymétrique sont nuls.

**CHAPITRE : 12**

**GEOMETRIE**

# 1 / Vecteurs, notion de colinéarité :

## 1.1 Définitions :

Dans le plan, un vecteur ou un point est représenté par un couple de coordonnées, appelé $2-liste$. Il s'agit alors d'un élément de $\mathbb{R}^2$.
Dans l'espace, un vecteur ou un point, est représenté par un triplet de coordonnées appelé $3-liste$. Il s'agit alors d'un élément de $\mathbb{R}^3$.
Dans ce cours, le plan et l'espace sont munis de repères orthonormaux.

## 1.2 Définition :

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sont dits **colinéaires** si et seulement si il existe un nombre réel $\lambda$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda.\overrightarrow{u}$.
On dit alors que les vecteurs ont "même direction".

## 1.3 Cas particulier : Dans le plan :

### 1.3.1 Définition :

$\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ si $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors on appelle

**déterminant** des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, le nombre, $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x.y' - x'y$.

En fait, $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est également le déterminant de la matrice $2 \times 2$ formée par les coordonnées, en colonne, des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

### 1.3.2 Propriété :

$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

# 2 / Produit scalaire, norme

## 2.1 Définition du produit scalaire :

$\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ si $\overrightarrow{u}\ (x, y)$ et $\overrightarrow{v}\ (x', y')$ alors
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ si $\overrightarrow{u}\ (x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$ alors
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'$ et $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

2.2 Propriétés :

Le produit scalaire est une application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$
\begin{array}{l}
\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\ \in\ \mathbb{R} \\
\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}\ =\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \\
\forall\ (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})\ =\ \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \\
\forall\ \lambda \in \mathbb{R}\ ,\ \forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (\lambda \overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} =\ \lambda(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) \\
\forall\ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geq 0 \\
\forall\ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0\ \Leftrightarrow\ \overrightarrow{u}\ =\ \overrightarrow{0}
\end{array}
$$

2.3 Remarque :

$\forall\ \overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n \quad \|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$ donc la norme est associée au produit scalaire**.**

$\overrightarrow{u}$ est dit **unitaire** $\Leftrightarrow\ \|\overrightarrow{u}\| = 1$

2.4 Propriétés de la norme :

2.4.1 $\forall\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E} \quad \|\overrightarrow{u}\| \geq 0$

2.4.2 $\forall\ \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall\ \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E} \quad \|\lambda.\overrightarrow{u}\| = |\lambda|\,.\,\|\overrightarrow{u}\|$

## 3 / orthogonalité

3.1 Définitions :

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$

3.2 Projection orthogonale d'un vecteur sur une droite :

Soit $\overrightarrow{D}$ une droite vectorielle dirigée par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ .
Pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle **projection orthogonale de** $\overrightarrow{v}$ **sur** $\overrightarrow{D}$ le vecteur $p(\overrightarrow{v}) = (\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{u}$

## 4 / Droites

4.1 Théorème : **Equation paramétrique d'une droite du plan**

$\mathbb{R}^2$ est le plan affine rapporté au repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ $\mathcal{D}$ est la droite $(A, \overrightarrow{u})$ avec $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ alors $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \left\{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \end{array}\right.$

$\overrightarrow{u}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite $\mathcal{D}$

.

4.2 Théorème : **Equation paramétrique d'une droite de l'espace**

$\mathbb{R}^3$ est l'espace affine rapporté au repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ $\mathcal{D}$ est la droite $(A, \overrightarrow{u})$ avec $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ alors $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}\ /\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha \\ y = y_0 + \lambda\beta \\ z = z_0 + \lambda\gamma \end{cases}$

## 5 / Géométrie dans le plan

5.1 Définition :

Soit $D$ une droite, soit $\overrightarrow{u}\ (\alpha, \beta)$ un vecteur dirigeant $D$, Si $\alpha \neq 0$ alors on appelle **coefficient directeur , ou pente** de la droite $D$, le nombre: $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

5.2 Définition :

Soit $D$ une droite, soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur dirigeant $D$.
Tout vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ est appelé **vecteur normal** à la droite $D$.

5.3 Définition :

On appelle base d'un plan, tout couple de vecteurs de ce plan qui sont non colinéaires

5.4 Propriété :

Dans un plan muni d'un repère orthonormal, soit $D$ une droite dont $\overrightarrow{n}\ (a, b)$ est un vecteur normal .
La droite $D$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + c = 0$.
Remarque : $(a, b) \neq (0, 0)$ et, de plus, le vecteur $\overrightarrow{u}\ (-b, a)$ dirige $D$.

5.5 Propriété : **Equation d'un cercle** dans le plan

Dans un plan $\mathcal{P}$ , muni d'un repère orthonormé , l'équation du cercle de centre $A(a, b)$ et de rayon $r > 0$ est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2 = 0$.

## 6 / Géométrie dans l'espace

6.1 Théorème : **Equation paramétrique d'un plan** de l'espace

$\mathbb{R}^3$ est l'espace affine rapporté à un repère $\mathcal{R}$ Soit $\mathcal{P}$ le plan $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $A\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}$ alors

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{P} \Longleftrightarrow \exists\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\ /\ \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha + \mu\alpha' \\ y = y_0 + \lambda\beta + \mu\beta' \\ z = z_0 + \lambda\gamma + \mu\gamma' \end{cases}$$

.

6.2 Définition :

Soit $\mathcal{P}$ un plan, soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs dirigeant $\mathcal{P}$.
Tout vecteur $\overrightarrow{n}$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$ **et** à $\overrightarrow{v}$ est appelé **vecteur normal** au plan $\mathcal{P}$.

6.3 Propriété :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal, soit $\mathcal{P}$ un plan, soit $\overrightarrow{n}\ (a, b, c)$ un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
Le plan $\mathcal{P}$ admet une **équation cartésienne** de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
Remarque : $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$

6.4 Définition :
Deux sous espaces affines sont **parallèles** si et seulement si leurs espaces vectoriels associès sont identiques ou si l'un est inclus dans l'autre.

## 7 / Barycentre

7.1 Définition :
On appelle point pondéré d'un espace affine $\mathbb{R}^n$, un couple $(A, \alpha)$ , $A \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
Le réel $\alpha$ est appelé masse ou coefficient affecté au point $A$.
On appelle système pondéré $S = \{(A_i, \alpha_i), 1 \leq i \leq n\}$, où $A_i$ est un point de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha_i$ un réel.

7.2 Condition d'éxistence :
Le système $S$ admet un barycentre **uniquement** lorsque $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 0$

7.3 Définition : Barycentre
Le **barycentre**, du système $S$ est l'**unique** point G tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.
Lorsque toutes les masses du système sont égales, le barycentre G est dit :
**isobarycentre** des points $(A_i)_{\ 1 \leq i \leq n}$

7.4 Propriété : Position

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \times \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

7.5 Propriété : Coordonnées
Si dans un repère cartésien de $\mathbb{R}^3$ les coordonnées de chaque point $A_i$ sont $(x_i, y_i, z_i)$ alors les coordonnées de $G$ sont

$$x_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \times \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad y_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \times \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \qquad z_G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} \times \sum_{i=1}^{n} \alpha_i z_i$$

**CHAPITRE : 13**

**POLYNOMES**

## 1 / Ensemble $\mathbb{K}[X]$

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

### 1.1 Définitions : Polynôme

On appelle polynôme à une indéterminée $X$ et à coefficients dans $\mathbb{K}$ , toute expression de la forme $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + .... + a_pX^p$ où $(a_0, a_1, a_2, ...., a_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$

On écrit : $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_kX^k$

Lorsque le polynôme $P$ est fixé, les coefficients $a_k$ sont définis de manière unique.

L'ensemble des polynômes en $X$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ se note $\mathbb{K}[X]$.

### 1.2 Vocabulaire :

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{p} a_kX^k$
$a_0$ est appelé **terme constant.**

Le plus grand entier $k$ tel que $a_k \neq 0$ est appelé **degré du polynôme** $P$.
On le note $\deg(P)$

Un polynôme de degré nul est une constante.

Le **polynôme nul** est celui dont tous les coefficients sont nuls.

On convient que le **degré du polynôme nul est** $-\infty$.

Si $\deg(P) = p$ alors
$a_p$ est appelé **coefficient dominant**.
$a_pX^p$ est appelé monôme de plus haut degré ou **terme dominant**.

Si $\deg(P) = p$ et $a_p = 1$ alors $P$ est dit **unitaire ou normalisé**.

Les polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ ainsi que le polynôme nul forment l'ensemble $\mathbb{K}_n[X]$.

### 1.3 Propriétés :

#### 1.3.1 Egalité de deux polynômes :

Deux polynômes ayant en tout point même valeur sont dits égaux.
Ils ont alors même degré, et leurs coefficients respectifs sont égaux.
c'est à dire: si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ alors
$P = Q \Longleftrightarrow ( \ p = q \ \ et \ \ \forall k \in \mathbb{N} \ \ , \ a_k = b_k)$

#### 1.3.2 Addition de deux polynômes :

si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ , alors $P + Q = \sum_{k=0}^{\max(p,q)} (a_k + b_k) X^k$
$\deg(P + Q) \leq \max\{\deg(P), \deg(Q)\}$

#### 1.3.3 Multiplication d'un polynôme par un scalaire : (multiplication externe)

si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ alors $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k$

#### 1.3.4 Multiplication de deux polynômes : (multiplication interne)

si $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k$ , alors $PQ = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k$ avec $c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$
$\deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q)$
$P \times Q = 0 \Longleftrightarrow P = 0$ ou $Q = 0$

## 2 / Dérivation d'un polynôme

### 2.1 Définition :

Soit $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$ un polynôme et $P'$ son polynôme dérivé.

- si $\deg(P) \geq 1$ alors $P' = \sum_{k=1}^{p} k \times a_k X^{k-1}$ et $\deg(P') = \deg(P) - 1$
- si $\deg(P) = 0$ alors $P' = 0$

### 2.2 Notation :

On note $P^{(k)}$ le polynôme obtenu en dérivant $k$ fois $P$.

### 2.3 Propriétés :

$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

- $(P + Q)' = P' + Q'$
- $(\lambda P)' = \lambda P'$
- $(P \times Q)' = P' \times Q + Q' \times P$

### 2.4 Théorème : Formule de Leibniz

$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2 \quad (P \times Q)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} \times Q^{(n-k)}$

.

## 3 / Racines d'un polynôme

### 3.1 Définition :

$\alpha$ est appelé racine ou "zéro" de $P$ si $P(\alpha) = 0$.

### 3.2 Théorème :

$\alpha$ est racine de $P$ équivaut à $P$ est divisible par $(X - \alpha)$
C'est à dire: $\exists\ Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha) \times Q$
$Q$ est appelé quotient de la division de $P$ par $(X - \alpha)$

### 3.3 Théorème :

Un polynôme de degré $n$ admet au plus $n$ racines distinctes.
Conséquence : Tout polynôme de degré $n$ admettant $n + 1$ racines est le polynôme nul.

### 3.4 Racines multiples :

#### 3.4.1 Définition :

$\alpha$ est appelé racine d'ordre $k$ du polynôme $P$ si : $\exists\ Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k \times Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$
si $k = 1$ alors $\alpha$ est appelé racine simple du polynôme $P$.
Une racine d'ordre zéro n'est pas une racine !

#### 3.4.2 Théorème :

$$\alpha \text{ racine d'ordre } k \text{ de } P \iff \begin{cases} P(\alpha) = P'(\alpha) = P^{(2)}(\alpha) = \ldots\ldots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0 \\ P^{(k)}(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

## 4 / Factorisations

### 4.1 Décomposition :

#### 4.1.1 Théorème : Théorème de d'Alembert

Tout polynôme de degré $n$, à coefficients complexes , admet $n$ racines complexes ( en comptant chaque racine autant de fois que sa multiplicité )

.

### 4.1.2 Corollaire :

Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ peut donc s'écrire sous forme d'un produit de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ du premier degré .

$$P \in \mathbb{C}_n[X] \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \ a \in \mathbb{C}^* \\ \exists \ (z_1, z_2, z_3, ..., z_r) \in \mathbb{C}^r \\ \exists \ (m_1, m_2, m_3, ..., m_r) \in \mathbb{N}_*^r \\ m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_r = d°(P) = n \\ P(X) = a(X - z_1)^{m_1}(X - z_2)^{m_2}(X - z_3)^{m_3}.....(X - z_r)^{m_r} \end{cases}$$

La somme des ordres de multiplicité des racines est donc égale au degré

### 4.2.1 Théorème :

Soit $P$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ , donc à coefficients réels, si $\alpha$ est racine complexe de $P$ alors $\overline{\alpha}$ est également racine de $P$.
De plus si $\alpha$ est racine d'ordre $k$ alors $\overline{\alpha}$ est également racine à l'ordre $k$.

### 4.2.2 Théorème :

Tout polynôme de degré impaire de $\mathbb{R}[X]$ admet au moins une racine réelle du polynôme

## 4.3 Définition :

Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est dit scindé s'il est factorisable en un produit de polynômes du premier degré.
Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$. Il n'est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ que si toutes ses racines sont réelles.

**CHAPITRE : 14**

**STATISTIQUES**

# 1 / Statistique univariée :

## 1.1 Définitions population, caractère :

Toute étude statistique concerne un ensemble $\Omega$ appelé **population** dont les éléments sont appelés **individus**.
L'étude consiste en l'analyse d'une variable $X$ observée sur les individus.
$X$ est aussi appelé **caractère.**

Pour obtenir un renseignement exact concernant $X$, il faut étudier tous les individus de la population.

Si cela n'est pas possible, on étudie seulement les individus d'une partie finie $E$ de $\Omega$.
$E$ est alors appelé **échantillon**.

## 1.2 Variables qualitatives ou quantitatives :

On distingue les variables $X$ **qualitatives** des variables $X$ **quantitatives.**
Par exemple si $\Omega$ est l'ensemble des moutons d'un élevage :
· le poids de chaque mouton est une variable **quantitative**
· le fait d'être atteint ou non par une maladie est une variable **qualitative**.

## 1.3 Variables discrètes :

Le caractère $X$ est dit **discret** si les valeurs prises par $X$ sont isolées les unes des autres. (exemple : les notes de chacun des étudiants à un DS)

## 1.4 Variables continues :

Le caractère $X$ est dit **continu** s'il peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle.
(exemple : les âges de chacun des parents, résumés en $p$ tranches d'âges)
$\forall\ i \in [[1;p]]$ , les classes sont notées $[a_i, a_{i+1}[$.
On note $c_i \ = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$ le milieu de chaque classe.
On appelle fréquence de la classe $[a_i, a_{i+1}[$ le réel $f_i = \dfrac{c_i}{n}$

## 1.5 Données non groupées :

Les résultats de l'observation peuvent être des **données non groupées** :
(exemple : chaque note $x_i$, $i \in [[1;n]]$ obtenue au DS par chacun des $n$ étudiants)

.

## 1.6 Données groupées :

Les résultats de l'observation peuvent être des **données groupées** :
(exemple : pour chaque note $x_j$, $j \in [[1;p]]$ où $p$ est le nombre de groupes,
on note $n_j$ l'effectif obtenu pour cette note $x_j$, avec $\sum_{j=1}^{p} n_j = n$)

On appelle **fréquence** de $x_i$ le réel $f_i = \dfrac{n_i}{n}$

Remarque $\sum_{i=1}^{p} f_i = 1$

On appelle **fréquence cumulée** de $x_i$ ou de la classe $[a_i, a_{i+1}[$
le réel $p_i = \sum_{j \leq i} f_j = \dfrac{1}{n} \sum_{j \leq i} n_j$

## 1.7 Représentations graphiques :

### 1.7.1 Variable discrète : Diagramme en bâtons des effectifs ou des fréquences.

### 1.7.2 Variable continue : Histogramme des effectifs ou des fréquences.

### 1.7.3 Pour toutes variables : Courbe cumulative des effectifs ou des fréquences.

## 1.8 Valeurs caractéristiques :

### 1.8.1 Paramètres de **position** (ou de tendance centrale)

#### 1.8.1.1 Le mode

Si $X$ est une variable discrète, on appelle **mode** toute valeur $x_i$ dont l'effectif, ou la fréquence, est maximum.

Si $X$ est une variable continue, on appelle **classe modale** toute classe $[a_i, a_{i+1}[$ pour laquelle $\dfrac{n_i}{a_{i+1} - a_i}$ ou $\dfrac{f_i}{a_{i+1} - a_i}$ est maximum.

#### 1.8.1.2 La médiane

Si $X$ est une variable discrète, prenant $n$ valeurs $x_1 \leq ... \leq x_i \leq ... \leq x_n$ (les valeurs prises par $X$ n'étant pas groupées)
on appelle **médiane** le nombre réel $m_e$ tel qu'il y ait autant de valeurs $x_j \leq m_e$ que de valeurs $x_j \geq m_e$

Si $X$ est une variable continue, on appelle **médiane** le nombre réel $m_e$ abscisse du point d'ordonnée $\dfrac{1}{2}$ de la courbe cumulative des fréquences.

.

#### 1.8.1.3 La moyenne

Si $X$ est une variable discrète de distribution $\{(x_i, n_i) \ / \ 1 \leq i \leq p\}$, on appelle **moyenne** le nombre réel $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{p} n_i.x_i = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i.x_i$

Si $X$ est une variable continue de distribution :
$\{([a_i, a_{i+1}[\,, n_i) \ / \ 1 \leq i \leq p\}$ on appelle **moyenne** le nombre réel $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{p} n_i.c_i$ où $c_i \ = \dfrac{a_i + a_{i+1}}{2}$

### 1.8.2 Paramètres de **dispersion**

#### 1.8.2.1 Variance

La variance est "la moyenne des carrés des écarts à la moyenne"

· Pour une variable discrète non groupée, $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$

1.8.2.1.1 Propriété : $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2$

· Pour une variable discrète groupée, $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{p} n_i.(x_i - \overline{x})^2$

1.8.2.1.2 Propriété : $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{p} n_i.x_i^2 - \overline{x}^2$.

1.8.2.1.3 Propriété : $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i.(x_i - \overline{x})^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i.x_i^2 - \overline{x}^2$

· Pour une variable continue groupée, $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{p} n_i.(c_i - \overline{x})^2$

1.8.2.1.4 Propriété : $V(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{p} c_i.x_i^2 - \overline{x}^2$

1.8.2.1.5 Propriété : $V(X) = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i.(c_i - \overline{x})^2 = \sum\limits_{i=1}^{p} f_i.c_i^2 - \overline{x}^2$

#### 1.8.2.2 Ecart type

On appelle **écart type** le nombre $\sigma_x = \sqrt{V(X)}$

#### 1.8.2.3 Quartiles

Pour une variable discrète et pour $k \in [[1;3]]$, on appelle $\mathbf{k}^{ième}$ **quartile** le nombre réel $q_k$ tel qu'il y ait $\dfrac{k}{4}.n$ valeurs $x_i$ inférieures ou égales à $q_k$.
Remarque : $q_2$ est la médiane de la série.

Si $X$ est une variable continue, on appelle $\mathbf{k}^{ième}$ **quartile** le nombre réel $q_k$ abscisse du point d'ordonnée $\dfrac{k}{4}$ de la courbe cumulative des fréquences.

.

#### 1.8.2.4 Déciles

Les **déciles** sont définis comme les quartiles, mais pour $1 \leq k \leq 9$.

#### 1.8.2.5 L'étendue = $[x_{\min}; x_{\max}]$

### 1.9 Représentation des données : ' La boite à moustache '

## 2 / Statistique bivariée :

### 2.1 Présentation des données :

Soient $X$ et $Y$ deux variables quantitatives définies sur une même population $\Omega$.
L'étude d'un échantillon de taille $n$ donne $n$ couples de valeurs $(X, Y)$ qui constituent la distribution statistique du couple $(X, Y)$

2.1.1 Présentation des **données non groupées** si $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$ :

| $individu$ | 1 | ... | $i$ | ... | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | | $x_i$ | | $x_n$ |
| $Y$ | $y_1$ | | $y_i$ | | $y_n$ |

2.1.2 Présentation des **données groupées** si $1 \leq i \leq r$ et $1 \leq j \leq s$ :

| $X \backslash Y$ | $y_1$ | ... | $y_j$ | ... | $y_s$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $n_{1,1}$ | | $n_{1,j}$ | | $n_{1,s}$ |
| ... | ... | | ... | | ... |
| $x_i$ | $n_{i,1}$ | | $n_{i,j}$ | | $n_{i,s}$ |
| ... | ... | | ... | | ... |
| $x_r$ | $n_{r,1}$ | | $n_{r,j}$ | | $n_{r,s}$ |

#### 2.1.2.1 Définitions et propriétés

$n_{i,j}$ est l'effectif du couple $(x_i, y_j)$ c'est à dire le nombre d'individus pour lesquels $X = x_i$ et $Y = y_j$

Remarque $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} n_{i,j} = n$

La fréquence du couple $(x_i, y_j)$ est $f_{i,j} = \dfrac{n_{i,j}}{n}$

Remarque $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} f_{i,j} = 1$

.

2.1.2.2 Fréquences marginales

On appelle **effectif marginal** de $x_i$ le nombre $n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^{s} n_{i,j}$

Remarque $n_{i\bullet}$ est le nombre d'individus pour lesquels $X = x_i$

De même, on appelle **effectif marginal** de $y_j$ le nombre $n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^{r} n_{i,j}$

## 2.2 Valeurs caractéristiques de la série statistique :

### 2.2.1 Pour une série de données non groupées :

**Moyenne** $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$

**Variances** $V_x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{X}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$

**Ecarts types** $\sigma_x = \sqrt{V_x}$

**Covariance** du couple $\sigma_{xy} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}.\overline{Y}$

**Coefficient de corrélation** : $\rho = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

### 2.2.2 Pour une série de données groupées :

**Moyennes** $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet} x_i$ $\qquad \overline{Y} = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j} y_j$

**Variances** $V_x = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{r} n_{i\bullet} x_i^2 - \overline{X}^2$ $\qquad V_y = \dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{s} n_{\bullet j} y_j^2 - \overline{Y}^2$

**Ecarts types** $\sigma_x = \sqrt{V_x}$ $\qquad \sigma_y = \sqrt{V_y}$

**Covariance** du couple $\sigma_{xy} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} n_{i,j} x_i y_j - \overline{X}.\overline{Y}$

**Coefficient de corrélation** : $\rho = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$

## 2.3 Nuage de points :

### 2.3.1 Définitions

Dans un repère orthogonal, à chaque individu de l'échantillon
on associe le point $M_i(x_i, y_i)$.
Si $(X, Y)$ prend la valeur $(x_i, y_i)$ pour $m$ individus alors on dessine
autour de $M_i$ un disque d'aire proportionnelle à $m$.

On obtient ainsi le **nuage de points** représentant la distribution $(X, Y)$.

Le point $G$ de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ est appelé **point moyen** du nuage.

.

### 2.3.2 Ajustement affine, définition

Lorsque le nuage de points représentant le distribution $(X, Y)$ est approximativement rectiligne, on cherche l'équation d'une droite qui "ajuste" le nuage. On parle alors d'**ajustement linéaire ou affine.**

### 2.3.3 Ajustement affine propriétés

La droite $\Delta$ dite de **régression de** $y$ **en** $x$ a pour équation :

$$(\Delta) \ : \quad y - \overline{Y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \overline{X})$$

La droite $\Delta'$ dite de **régression de** $x$ **en** $y$ a pour équation :

$$(\Delta') \ : \quad x - \overline{X} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \overline{Y})$$

Remarque : le point moyen $G$ appartient à $\Delta$ et à $\Delta'$.

Remarque : si $|\rho|$ est voisin de 1 alors les variables $x$ et $y$ sont dites

**"bien corrélées"**

**CHAPITRE : 15**

**ETUDE DES SUITES REELLES**

## 1 / Vocabulaire

Dans tout ce paragraphe :
- $E$ est un ensemble muni d'une relation d'ordre notée $\leq$
- $A$ est un sous ensemble de $E$

1.1 Majorant, minorant :
Un élément $x$ de $E$ est un majorant de $A$ si et seulement si : $\forall\ a \in A,\ a \leq x$
Un élément $x$ de $E$ est un minorant de $A$ si et seulement si : $\forall\ a \in A,\ a \geq x$

1.2 Plus grand et plus petit élément
S'il existe un élément $x$ de $A$ qui majore $A$, alors il est appelé plus grand élément de $A$
S'il existe un élément $x$ de $A$ qui minore $A$, alors il est appelé plus petit élément de $A$
Attention : le plus petit ou le plus grand élément de $A$ n'existent pas toujours.

1.3 Partie bornée :
On dit que l'ensemble $A$ est majoré (resp. minoré) si et seulement s'il existe au moins un majorant (resp. minorant) de $A$ dans $E$. On dit que $A$ est borné (dans $E$) si et seulement si $A$ est majoré et minoré (dans $E$).
Remarque: l'ensemble vide est une partie bornée de $E$.

1.4 Borne supérieure, inférieure
Dans $\mathbb{R}$, toute partie $A$, non vide et majorée admet un plus petit majorant. Il est appelé borne supérieure de $A$. On le note $\sup(A)$
De même, le plus grand des minorants de $A$ est appelé borne inférieure de $A$
et noté $\inf(A)$

## 2 / Les suites

2.1 Définition :
On appelle suite réelle toute application $u$ d'une partie $A$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ $\ u : A \to \mathbb{R}$
Dans ce chapitre, sauf mention contraire, $A = \mathbb{N}$

2.2 Sens de variation
la suite $(u_n)$ est dite :
constante si: $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n = u_0$
stationnaire si: $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $n \geq n_0 \Longrightarrow u_n = u_{n_0}$
croissante si: $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \leq u_{n+1}$
strictement croissante si: $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n < u_{n+1}$
décroissante si: $\forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \geq u_{n+1}$
monotone si elle est uniquement croissante ou uniquement décroissante.

2.3 Théorème Détermination du sens de variation de $(u_n)$

$1^{ère}$ méthode : chercher le signe de $u_{n+1} - u_n$.
$2^{ème}$ méthode : étudier de la position de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ par rapport à 1 et étudier le signe de $u_n$.

2.4 Définition Bornes

La suite $(u_n)$ est dite majorée s'il existe un réel $M$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $u_n < M$.
(définition analogue pour $(u_n)$ minorée).
Une suite bornée est une suite majorée et minorée donc telle que :
$\exists\ M \in \mathbb{R}^+$ , $\forall\ n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_n| \leq M$
Attention: $M$ doit être un nombre réel fixe, c'est-à-dire indépendant de $n$.

## 3 / Convergence, divergence

3.1 Définition

Une suite est dite convergente si et seulement si elle admet une **limite finie**.
Une suite numérique $(u_n)$ converge vers $l$, élément de $\mathbb{K}$, si et seulement si :
$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ n \in \mathbb{N}, (\ n > N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\ )$.

3.2 Définition

Une suite numérique $(u_n)$ diverge si et seulement si elle ne converge pas.

3.3 Définition " **limite infinie** "

Une suite $(u_n)$ tend vers $+\infty$ (ou admet $+\infty$ pour limite) si et seulement si:
$\forall\ A > 0\ ,\ \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ (\ n > N \Longrightarrow u_n > A)$
Une suite $(u_n)$ tend vers $-\infty$ (ou admet $-\infty$ pour limite) si et seulement si:
$\forall\ B < 0, \exists\ N \in \mathbb{N}, \forall\ n \in \mathbb{N}, (\ n > N \Longrightarrow u_n < B)$

3.4 Théorème "Unicité de la limite"

Si une suite numérique $(u_n)$ converge , elle n'a qu'une seule limite $l$

3.5 Théorème : suites extraites $(u_{2n+1})$ et $(u_{2n})$

Soit $(u_n)$ une suite dont $(u_{2n+1})$ et $(u_{2n})$ sont deux sous suites extraites.
Si les suites $(u_{2n+1})$ et $(u_{2n})$ convergent vers une même limite $l$ alors la
suite $(u_n)$ converge vers la même limite $l$

3.6 Théorème

Si une suite numérique $(u_n)$ converge vers une limite $l$ non nulle, alors,
à partir d'un certain rang, ses termes ont tous le signe de la limite $l$.

3.7 Remarque

Toute suite réelle de limite $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente.

3.8 Théorème Convergence monotone

Toute suite réelle croissante et majorée est convergente.
Toute suite réelle décroissante et minorée est convergente.

.

3.9 Théorème Suites et bornes

3.9.1 Toute suite rélle convergente est bornée.

3.9.2 Toute suite réelle monotone admet une limite finie ou infinie.

3.9.3 Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée.

3.9.4 Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.

3.9.5 Toute suite croissante et divergente tend vers $+\infty$.

3.9.6 Toute suite décroissante et divergente tend vers $-\infty$.

## 4 / Propriétés d'ordre des suites réelles convergentes

4.1 Proposition

Soit $(u_n)$, une suite réelle convergeant vers une limite $l$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
$\exists\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\ /\ a < l < b \Leftrightarrow \exists\ N \in \mathbb{N}\ /\ \ \forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ n > N \Longrightarrow a \leq u_n \leq b$

4.2 Proposition dite du " passage à la limite dans les inégalités "

Soient $(un)$ et $(vn)$ deux suites réelles , si
$\forall\ n \in \mathbb{N}\ \ ,\ u_n < v_n$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \ \leq \ \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$

4.3 Théorème "Théorème d'encadrement ou des gendarmes"

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$, trois suites réelles telles que
$\exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}\ ,\ (n > N \Longrightarrow u_n \leq v_n \leq w_n)$ avec $(u_n)$ et $(w_n)$ qui convergent vers une même limite $l$ alors, $(v_n)$ converge également vers $l$.

4.4 Théorème

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles , si

$$\begin{cases} \exists\ N \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N}, (\ n > N \Longrightarrow u_n < v_n) \\ \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty \end{cases} \qquad \text{alors} \qquad \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$$

4.5 Théorème suites adjacentes

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles , si
· à partir d'un certain rang $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ décroissante
· $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$
alors les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites adjacentes et convergent vers la même limite.

4.6 Théorèmes : convergence en valeur absolue

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \Longleftrightarrow \lim_{n \to +\infty} |u_n| = 0$$

## 5 / Limite d'une somme et d'un produit de suites

### 5.1 Théorème $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n+v_n)$

| | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | | | | |
| $l'$ | | $l+l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $+\infty$ | | $+\infty$ | $+\infty$ | ? |
| $-\infty$ | | $-\infty$ | ? | $-\infty$ |

### 5.2 Théorème $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n\times v_n)$

| | $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ | $l>0$ | $l=0$ | $l<0$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ | | | | | | |
| $l'>0$ | | $l\times l'$ | 0 | $l\times l'$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $l'=0$ | | 0 | 0 | 0 | ? | ? |
| $l'<0$ | | $l\times l'$ | 0 | $l\times l'$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | | $+\infty$ | ? | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | | $-\infty$ | ? | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

## 6 / Suites équivalentes

### 6.1 Définition :

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites. S'il existe une suite $(w_n)$ telle que :
à partir d'un certain rang, $u_n = v_n \times w_n$, avec $\lim\limits_{+\infty} w_n = 1$
alors les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites équivalentes, notation : $u_n \sim v_n$

### 6.2 Théorème :

Si à partir d'un certain rang, $(v_n)$ ne s'annule pas alors $u_n \sim v_n \Longleftrightarrow \lim\limits_{+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

### 6.3 Théorèmes :

Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites.

6.3.1 Si $u_n \sim v_n$ alors $(u_n)$ et $(v_n)$ sont de même nature.
6.3.2 Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{+\infty} v_n = l$ alors $\lim\limits_{+\infty} u_n = l$.

### 6.4 Théorèmes :

Soient $(u_n)$ , $(v_n)$ , $(w_n)$ et $(t_n)$ quatre suites telles que : $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$

6.4.1 alors $u_n \times w_n \sim v_n \times t_n$

6.4.2 Si à partir d'un certain rang $t_n \neq 0$ alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$

6.4.3 **Attention : on n'a pas** $u_n + w_n \sim v_n + t_n$

## 7 / Etude des suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

### 7.1 Définition de la suite :

Vérifier que $u_0 \in \mathcal{D}_f$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N}$ , $f(u_n) \in \mathcal{D}_f$.

### 7.2 Recherche d'une éventuelle limite :

Résoudre l'équation $f(x) = x$. Les solutions obtenues seront d'éventuelles limites de la suite $(u_n)$ . Mais cela ne prouve pas que $(u_n)$ converge.

### 7.3 Etude des variations de la suite $(u_n)$ :

7.3.1 Si $f$ est **monotone** alors il faut étudier la monotonie des suites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ou $(u_n)$.

7.3.2 De manière générale, l'étude des variations de la fonction $g$ définie par $g(x) = f(x) - x$ permet de déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$.

### 7.4 Etude de la convergence de la suite $(u_n)$ :

Si $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ ou $(u_n)$ sont monotones, alors on cherche à minorer ou à majorer ces suites par une des limites éventuelles.

## 8 / Croissances comparées

### 8.1 Comparaison entre la suite factorielle et la suite géométrique :

La suite $(n!)$ croit plus vite que la suite $(a^n)$

### 8.2 Comparaison entre la suite géométrique et la suite puissance :

La suite $(a^n)$ croit plus vite que la suite $(n^\alpha)$